

Messung von Straßenunebenheiten und deren Einfluß auf Fahrzeug und Fahrbahn

Koeßler, Paul
Mitschke, Manfred

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 9, 1957,
S.225-256



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Messung von Straßenunebenheiten und deren Einfluß auf Fahrzeug und Fahrbahn

Von Paul Koeßler und Manfred Mitschke

Mit 20 Abbildungen

Summary: For telling anything about the quality of roads you have to measure their ground contour (unevenness, distributions and sizes of raised obstacles and pot-holes) and to know the mutual influence of vehicle and road together.

At first there will be described the development of an instrument which is to use with a speed of more than 20 mph in a manner of geodesy.

Further on there will be derived maximum limits for suffering unevenness by means of dynamic movements of the vehicle and the physiological properties of passengers.

Vorbemerkung: Ein wesentlicher Anteil der vielfältigen Wechselwirkungen zwischen Fahrzeug und Fahrbahn besteht in der Anregung von Schwingungen durch die Unebenheit und in der Rückwirkung der damit bedingten Lastschwankungen auf die Fahrbahn. Ebenheit der Fahrbahn schont Fahrzeug und Ladegut, trägt aber auch wesentlich zur Erhaltung der Fahrbahn bei. Diese Erkenntnis wird im Straßenbau zunehmend beachtet; man benötigt deshalb einerseits verbesserte Meßgeräte sowohl zur Bauprüfung und -abnahme, als auch zur laufenden Betriebsüberwachung, andererseits auch weitergehende Untersuchungen über die Unebenheitswirkung und ihre zulässigen Grenzen.

Dem Institut für Fahrzeugtechnik war die Aufgabe gestellt, ein Unebenheitsmeßgerät großer Arbeitsgeschwindigkeit zu entwickeln. Naheliegenderweise wurde dabei auch versucht, die Frage zulässiger Unebenheitsgrenzen einer Lösung näher zu führen. Dementsprechend behandelt der 1. Teil nachstehender Arbeit Entwicklungsgrundlagen des 1111 Gerätes, der 2. Teil die Beurteilung der Fahrbahnunebenheiten.

1. Meßverfahren und Gang der Entwicklung

Die bereits recht zahlreich vorhandenen Ebenheitsmeßgeräte [1] können im wesentlichen in 2 Gruppen eingeteilt werden: in solche, die das geodätische Profil aufnehmen oder kollektiv auswerten, und solche, die die Wirkung der Unebenheiten auf ein Fahrzeug (oder ein ähnliches System) messen. Das „Braunschweiger Gerät“ gehört zur ersten Gruppe. Abb. 1a zeigt als Beispiel hierfür den Profilografen nach Köhler-Fuß. Als notwendige Bestandteile erkennt man die Bezugsgerade, dargestellt durch die einnivellierte Latte l , den Meßfühler f und das Registriergerät g . Der sehr niedrigen Arbeitsgeschwindigkeit steht der Vorteil großer Meßgenauigkeit gegenüber. Schon hier zeichnet sich auch die Möglichkeit ab, durch Wahl des Meßraddurchmessers Unebenheiten auszuschneiden, die das Fahrzeugrad nicht beeinflussen. Die Bedingung größerer Arbeitsgeschwindigkeit zwingt stets zur Aufgabe der ortsfesten Bezugsgeraden (wenn man von dem indiskutablen Aufwand etwa eines unveränderlichen einnivellierten Randstreifens absieht). Einfachstes Beispiel hierfür ist das aus Abb. 1a abgewandelte Gerät nach Abb. 1b. Hier kann nicht mehr die Unebenheit $h(y)$, sondern nur der Relativabstand $z(y) = x(y) - h(y)$ ermittelt werden.

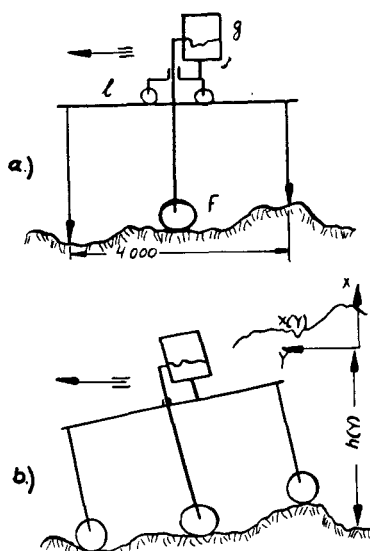


Abb. 1. a) Profilograph nach Köhler-Fueß
b) Gegenüber a) abgewandeltes fahrbares Lattenmeßgerät

Bei der Braunschweiger Entwicklung verzichtete man selbstverständlich ebenfalls auf die ortsfeste Bezugsgerade (auch der bei manchen Geräten benutzte Ausweg des Vierradfahrzeugs wurde ausgeschieden).

Als ausführbar und vorteilhaft wurde erkannt, den Meßfühler an einem Pendel niedriger Eigenfrequenz anzuordnen und die Abstandsmessung selbst (großer Arbeitsgeschwindigkeit wegen) trägheitslos durchzuführen, wie dies Abb. 2 schematisch darstellt: Meßfühler f sitzt an der federnd und gedämpft im Trägereil r aufgehängten Masse m . Bei richtiger Abstimmung ist $q(t)$ von der Bewegung des Trägereils $x(t)$ weitgehend unabhängig. Ein Verfahren zu trägheitsloser Abstandsmessung war bereits in einer vorausgegangenen Institutsarbeit von Mühlfeld [2] angegeben worden. Es bestanden somit hauptsächlich die Aufgaben: Bau eines geeigneten Trägerfahrzeugs, zweckmäßige Pendelanordnung und Unterdrückung der durch die Pendeleigenbewegung

erzeugten Fehlanzeigen. Die weiteren Ausführungen behandeln nur die beiden ersten im Bereiche der Mechanik und Konstruktion gelegenen Arbeitsgebiete.

Nachdem an einem einfachen Vorversuchsgerät (I) gezeigt war, daß die angestellten Überlegungen Erfolg versprochen, wurde auf Grund von Berechnung unter vereinfachten Annahmen ein Dreiradanhängers mit Pendel (II) gebaut. Mit diesem Gerät wurden in Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe Fahrzeug und Fahrbahn der Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen Versuche über Strecken gefahren, die vergleichsweise mit dem Köhler-Fueß-Gerät vermessen waren. Dieser Vergleichsversuch fiel zwar im ganzen bereits recht befriedigend aus [7], doch zeigten sich noch Unterschiede, die teils in mechanischen, teils in elektrotechnischen Gegebenheiten begründet waren.

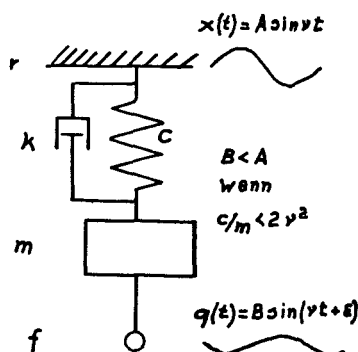


Abb. 2. Bewegungsmesser ohne Festpunkt,
 c = Federkonstante, k = Dämpfungskonstante,
 m = Masse

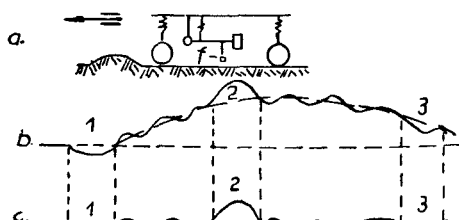


Abb. 3. Beeinflussung der Antenne f beim Überfahren einer Einzelerhebung

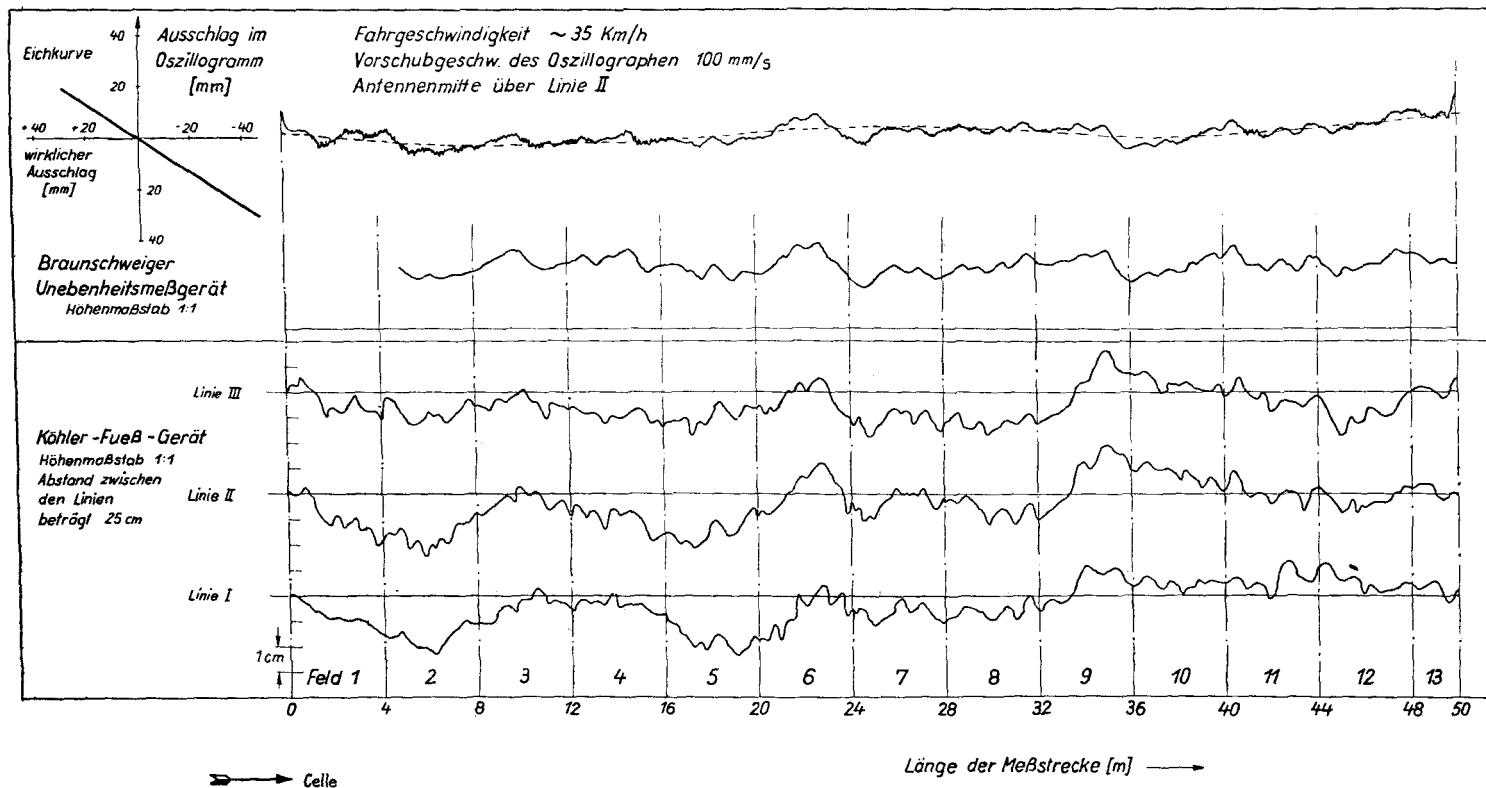


Abb. 4. Vergleich der Unebenheitsaufzeichnung zwischen Köhler-Fuß- und Braunschweig-Gerät

Abb. 3 stellt das Überfahren eines Einzelhindernisses durch das schematisch wiedergegebene Gerät dar. Linienzug *b* zeigt den Abstand des Meßfühlers, damit also die Gerätsanzeige ohne „Siebung“ der Pendeleigenbewegung, die etwa der in *b* gestrichelten Kurve entsprechen mag. Überfährt das Anhänger-vorderrad das Hindernis, so wird mit dem Anhänger auch der Meßfühler angehoben, es wird fälschlich eine Vertiefung angezeigt (Stelle 1); ähnliches tritt beim Überfahren des Hindernisses durch das Hinterrad auf (Stelle 3). Etwa „echt“ ist die Anzeige an Stelle 2, wo der Meßfühler selbst über das Hindernis geführt wird. Da auch der Anhänger zu Eigenschwingungen angeregt wird, werden der Eigenschwingung des Pendels Bewegungen höherer Frequenz überlagert, die in Linienzug *b* angedeutet sind. Wenn man die Eigenschwingung des Pendels aussieht, erhält man Linienzug *c*, der, wie ersichtlich, neben der „Soll“-erhebung an Stelle 2 die genannten Fehler enthält.

Nun zeigte die Praxis der genannten Vergleichsversuche im Einklang mit den genaueren theoretischen Ermittlungen, daß die Fehlanzeigen an den Stellen 1 und 3 des Beispiels nur dann ins Gewicht fallen, wenn das Hindernis lang im Verhältnis zur Meßgeschwindigkeit ist.

Die durch das elektrische Hochfrequenzverfahren gegebenen Unterschiede gegenüber dem Meßergebnis mit dem Profilografen sind als unbedenklich — teilweise sogar als erwünscht zu bezeichnen. Der Einfluß des Meßrades ist schon in der Vorbemerkung angedeutet. Ein kleines, schmales Meßrad zeichnet Unebenheiten auf, die das größere, breitere Fahrzeugrad überdeckt. Eine ähnliche Wirkung hat auch das flächenhaft wirkende Meßverfahren nach Mühlfeld; durch Wahl der Höhe über der Fahrbahn und der Breite des Meßfühlers ist außerdem die Größe der angemessenen Fläche (deren mittlerer Abstand angezeigt wird) einstellbar.

Abb. 4 gibt als Beispiel die Auswertung eines der genannten Vergleichsversuche (gute Kleinpflasterstraße) wieder. Oberer Linienzug: Wiedergabe des Oszillogrammstreifens des Abstandsmeßgerätes, der ohne Siebung der Pendeleigenfrequenz aufgenommen war. Darunter: Umzeichnung entsprechend der Eichkurve und unter Berücksichtigung der Pendeleigenfrequenz. Im unteren Teil der Darstellung: Drei im Querabstand von 25 cm aufgenommene Schriebe des Köhler-Fueß-Gerätes, umgezeichnet auf den Längenmaßstab des Oszillogrammes. Die Mitte des Meßfühlers des Braunschweiger Gerätes lag etwa über der Köhler-Fueß-Linie II. Der Augenschein zeigt recht befriedigende Übereinstimmung. (Näheres hierüber vgl. [7]).

2. Theoretische Überlegungen und Berechnungen

Es war nunmehr die Aufgabe zu lösen, den Meßanhänger so zu gestalten, daß die wenn auch im ganzen erträglichen Anzeigefehler soweit als irgend möglich unterdrückt werden. Die konstruktiv einfachste Bauart des Anhängers wäre einachsige-zweirädrig. Sowohl die Berechnungen [6] als auch Versuche mit dem vorübergehend entsprechend umgebauten Anhänger II erwiesen aber, daß hierbei das Pendel durch die Bewegungen des ziehenden Fahrzeugs zu großen Ausschlägen angeregt wird, weil mit Rücksicht auf die Straßenlage die Eigenfrequenz des Anhängers etwa ebenso groß gemacht werden muß, wie die

des als Zugfahrzeug zu verwendenden Pkw. Man entschied sich daher wieder für ein zweiachsiges Meßgerät.

Abb. 5a zeigt das Schema eines solchen Gerätes. Die Untersuchung eines derartig vielteiligen Systems ist nur unter vereinfachenden Annahmen möglich. Zunächst werden Trägerfahrzeug und Meßpendel getrennt betrachtet, damit wird also die Rückwirkung des Pendels auf das Trägerfahrzeug vernachlässigt. Dies ist zulässig, wenn, wie geschehen, das Verhältnis Pendelmasse—Fahrzeugmasse klein gehalten wird (etwa 10 : 300). Die Koppelschwingungen können ebenfalls unberücksichtigt bleiben, wenn die Eigenfrequenz des Pendels kleiner ist wie die des abgedeferten Fahrzeugteiles (Verhältnis etwa 1 : 6,6 ausgeführt).

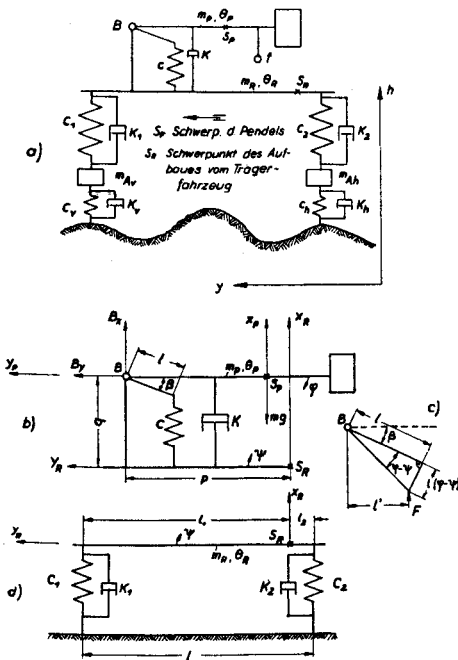


Abb. 5. a) Schwingungsschema eines zweiachsigen Anhängers (in Fahrtlängsrichtung) mit langsam schwingendem Pendel als Antennen-träger, c = Federkonstante, k = geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskonstante, m = Masse, Θ = Trägheitsmoment um den Schwerpunkt.

Bei der Berechnung der Eigenschwingungen des Fahrzeugteiles kann man vereinfachend die Achsmassen vernachlässigen, was bei entsprechenden Massen- und Frequenzverhältnissen naturgemäß ebenfalls zulässig ist. Diese Vernachlässigung ist bei Betrachtung der erzwungenen Schwingungen des Fahrzeuges (Erregung durch die Fahrbahn) nicht ohne weiteres gestattet. Denn dann wäre die von der Fahrbahn auf die Reifenfeder ausgeübte Kraft gleich der Kraft, die auf den Rahmen wirkt, während beide Kräfte in Wirklichkeit verschieden sind. Die Erregerfrequenzen dagegen sind gleich, wenn man die Unebenheit als harmonische Funktion ansieht (Amplituden und Phasenverschiebungen verschieden). Wie man später aus Abschnitt 2.21 ersieht, ist aber gerade die Größe der Frequenz sehr wichtig, so daß bei Erregerschwingungen in erster Näherung das Trägerfahrzeug unberücksichtigt bleiben darf.

2.1 Eigenschwingungen des Trägerfahrzeuges (Abb. 5 d, Achsmassen $m_A = 0$)

Sie ergeben sich aus den bekannten homogenen Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_R + \frac{k_1 + k_2}{m_R} \dot{x}_R + \frac{c_1 + c_2}{m_R} x_R + \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{m_R} \dot{\psi} + \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{m_R} \psi = 0 \quad (2.1a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_R + \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{\Theta_R} \dot{\psi} + \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2}{\Theta_R} \psi + \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{\Theta_R} \dot{x}_R + \\ + \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{\Theta_R} x_R = 0. \end{aligned} \quad (2.1b)$$

Mit den Einzelkreisfrequenzen für ungedämpfte Hub- und Nickschwingungen

$$\frac{c_1 + c_2}{m_R} = \nu_H^2 \quad (2.2) \quad \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2}{\Theta_R} = \nu_N^2 \quad (2.3)$$

lauten die Frequenzen des gekoppelten Systemes

$$\nu_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\nu_H^2 + \nu_N^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\nu_H^2 - \nu_N^2)^2 + \frac{(c_1 l_1 - c_2 l_2)^2}{m_R \Theta_R}} \quad (2.4)$$

und die Lösungen von (2.1a) und (2.1b) mit $k_1 = k_2 = 0$

$$x_R = X_1 \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + X_2 \cos(\nu_2 t + \gamma_2) \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \Psi_1 \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + \Psi_2 \cos(\nu_2 t + \gamma_2) = \\ &= \alpha_1 X_1 \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + \alpha_2 X_2 \cos(\nu_2 t + \gamma_2) \end{aligned} \quad (2.5b)$$

X_i und γ_i ergeben sich aus den Anfangsbedingungen, die Konstanten α_i

$$\text{zu } \alpha_1 = \frac{1}{\Theta_R} \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{\nu_1^2 - \nu_N^2}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\Theta_R} \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{\nu_2^2 - \nu_N^2}.$$

Beim entkoppelten System ($c_1 l_1 - c_2 l_2 = k_1 l_1 - k_2 l_2 = 0$) mit $k_1 = k_2 \neq 0$ ist

$$x_R = X e^{-\lambda_1 t} \cos(\nu_1 t + \gamma_1) \quad (2.6a)$$

$$\psi = \Psi e^{-\lambda_2 t} \cos(\nu_2 t + \gamma_2) \quad (2.6b)$$

mit $\frac{k_1 + k_2}{m_R} = 2 \lambda_1$; $\frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{\Theta_R} = 2 \lambda_2$ und den Kreisfrequenzen

$$\nu_1^2 = \nu_H^2 - \lambda_1^2 \quad (2.7) \quad \nu_2^2 = \nu_N^2 - \lambda_2^2 \quad (2.8).$$

2.2 Bewegungsgleichung des Pendelsystems (Abb. 5 b)

Nach dem Schwerpunkts- und Momentensatz für eine starre Scheibe ist

$$m_p \ddot{x}_p = B_x + F \cos \psi + E \cos \varphi - m_p g \quad (2.9a)$$

$$m_p \ddot{y}_p = B_y - F \sin \psi - E \sin \varphi \quad (2.9b)$$

$$\Theta_p \ddot{\varphi} = B_x s \cos \varphi - B_y s \sin \varphi + F(s - l') \cos(\varphi - \psi) + E(s - d) \cos(\varphi - \psi) \quad (2.9c)$$

(Der Aufbau des Trägerfahrzeuges kann sich, da in (2.1a) und (2.1b) die Bewegung in y_R -Richtung vernachlässigt wurde, nur um einen Punkt drehen, der auf der Abszisse y_R liegt. Darum kann man bei der Betrachtung des Pendels die Koordinaten x_R, y_R des Trägerfahrzeuges einführen.)

Eliminiert man die Lagerkräfte B_x und B_y , so wird aus (2.9c)

$$\Theta_p \ddot{\varphi} = m_p (\ddot{x}_p s \cos \varphi - \ddot{y}_p s \sin \varphi) + m_p g s \cos \varphi - (F' l' + E d) \cos (\varphi - \psi). \quad (2.9d)$$

Bei diesem holonomen System ist

$$x_p = x_R + p \sin \psi - q (1 - \cos \psi) - s \sin \varphi \quad (2.10a)$$

$$- y_p = p (1 - \cos \psi) + q \sin \psi - s (1 - \cos \varphi) \quad (2.10b)$$

Das Moment der Federkraft ergibt sich bei Vernachlässigung der Größen 2. Ordnung und bei kleinen Bewegungen (Abb. 5c) zu

$$F' l' = c l (L - L_0) \cos \beta + c l [l \cos^2 \beta - (L - L_0) \sin \beta] (\varphi - \psi). \quad (2.11a)$$

wobei L = Länge der ungespannten Feder, L_0 = Länge unter statischer Last. Das Federmoment bei statischer Belastung ($\varphi - \psi = 0$) beträgt

$$F_0 l' = c l (L - L_0) \cos \beta = m_p g s. \quad (2.11b)$$

Das Dämpfermoment berechnet sich zu $E d = k d^2 (\dot{\varphi} - \dot{\psi})$.

Feder- und Dämpferkennung wurden als linear abhängig angenommen; treten mehrere Störglieder auf, so darf dann deren Einfluß getrennt untersucht werden.

Werden die obigen Gleichungen in (2.9d) eingesetzt, die Koordinaten linearisiert, sowie das Trägheitsmoment um den Anlenkpunkt B eingeführt $\Theta_p + m_p s^2 = \Theta_B$, so ist

$$\begin{aligned} \Theta_B \ddot{\varphi} + \{c l [l \cos^2 \beta - (L - L_0) \sin \beta] + m_p s q \ddot{\psi}\} \varphi + k d^2 \dot{\varphi} &= m_p s (\ddot{x}_R + p \ddot{\psi}) + \\ + \{c l [l \cos^2 \beta - (L - L_0) \sin \beta] + m_p s q \ddot{\psi}\} \psi + k d^2 \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (2.9e)$$

Wird (2.9e) noch durch Θ_B dividiert, so lautet mit $\frac{c l}{\Theta_B} [l \cos^2 \beta - (L - L_0) \sin \beta] = \omega^2$ dem Quadrat der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Pendelsystemes, $\frac{k d^2}{\Theta_B} = 2 \delta$ dem Dämpfungsfaktor und $l_{\text{red}} = \frac{\Theta_B}{m_p s}$ der reduzierten Pendellänge die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + 2 \delta \dot{\varphi} + \left(\omega^2 + \frac{q}{l_{\text{red}}} \ddot{\psi} \right) \varphi = \frac{1}{l_{\text{red}}} (\ddot{x}_R + p \ddot{\psi}) + 2 \delta \dot{\psi} + \left(\omega^2 + \frac{q}{l_{\text{red}}} \ddot{\psi} \right) \psi. \quad (2.9f)$$

Liegt der Anlenkpunkt B des Pendels rechts vom Schwerpunkt S_R des Trägerfahrzeuges, so ist p negativ.

(2.9f) zeigt:

1. Der Koeffizient des Gliedes φ ist nicht konstant, sondern mit $\ddot{\psi}$ veränderlich. Es handelt sich um einen rheoleinen Schwinger (Hillsche Differentialgleichung). Wirken auf ihn Erregerbewegungen ein, so kann sich das Pendel gegenüber der statischen Ruhelage auf eine neue Gleichgewichtslage einstellen. Um solche Instabilitäten zu vermeiden, heißt die erste Konstruktionsbedingung für das Meßgerät $q = 0$. Damit wird aus (2.9f)

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = \frac{1}{l_{\text{red}}}(\ddot{x}_R + p\ddot{\psi}) + 2\delta\dot{\psi} + \omega^2\psi. \quad (2.12)$$

($1/l_{\text{red}} = 0$ zu machen, geht aus in 2.21 noch erwähnten Gründen nicht.)

2. Da die rechte Seite der Gleichung die Erregerfunktionen x_R , ψ und dessen Ableitungen enthält, muß man diese Einwirkungen klein halten.

2.21 Einfluß der Unebenheiten auf die Antenne. Beim Befahren von Unebenheiten der Form $h = H \sin \nu t$ (s. 4.) führt der Aufbau des Trägerfahrzeuges Erregerschwingungen $x_R = X \sin \nu t$ und $\psi = \Psi \sin \nu t$ aus, die nach (2.12) Winkelausschläge φ des Pendels bewirken. Der absolute Aus-

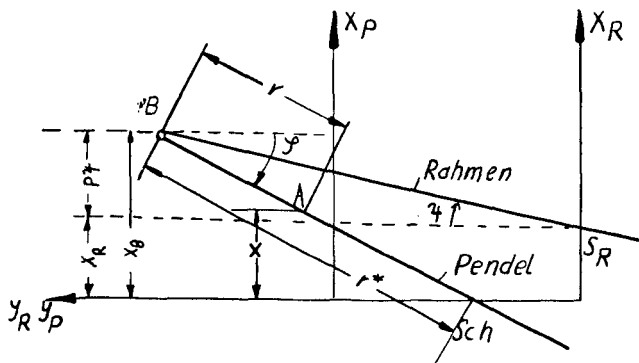


Abb. 6. Ausschlag des Pendels

schlag x des Pendelpunktes A , an dem die Antenne sitzt und der möglichst Null sein soll, beträgt nach Abb. 6

$$x = x_B - r\varphi = x_R + p\psi - r\varphi. \quad (2.13)$$

Im allgemeinen muß man für $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$ die Lösung der homogenen φ_h und die Partikularlösung der inhomogenen Gleichung φ_p einsetzen. Da aber die Lösung der homogenen Gleichung $\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$

$$\varphi_h = \Phi_h e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \xi), \quad (2.14)$$

die Eigenschwingung, herausgesiebt wird, darf φ_h unberücksichtigt bleiben.

Ω ist die Eigenfrequenz des gedämpften Pendelsystems

$$\Omega^2 = \omega^2 - \delta^2, \quad (2.15)$$

und das Verhältnis der Frequenzen ist

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{1 - D^2} \quad (2.16) \quad \text{mit } D = \frac{\delta}{\omega}. \quad (2.17)$$

Die Partikularlösung φ_{PN} für die Erregung durch Nickbewegungen ($x_R = 0$, der Fall der Hubbewegung ist darin enthalten) berechnet sich aus

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = \frac{p}{l_{\text{red}}}\ddot{\psi} + 2\delta\dot{\psi} + \omega^2\psi. \quad (2.12a)$$

Für den Sonderfall $\frac{p}{l_{\text{red}}} = +1$ ist $\psi = \varphi$, und mit der Bewegung der Antenne

$$x_N = p\psi - r\varphi_N \quad (2.13a)$$

ist $\frac{x_N}{l_{\text{red}}} = \frac{p}{l_{\text{red}}}\psi - \frac{r}{l_{\text{red}}}\varphi = \psi - \frac{r}{l_{\text{red}}}\varphi = 0$, wenn $\frac{r}{l_{\text{red}}} = 1$.

Fallen also Schwingungsmittelpunkt und Drehpunkt der Nickbewegungen (S_R) in der Ruhelage zusammen, so bleibt der Schwingungsmittelpunkt bei Nickbewegungen, die auch nicht harmonischen Gesetzen folgen dürfen, in Ruhe.

Für die anderen Fälle gilt bei harmonischer Erregung $\psi = \Psi e^{i\omega t}$

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = \left(-\frac{p}{l_{\text{red}}}\nu^2 + 2\delta\nu i + \omega^2\right)\Psi e^{i\omega t}.$$

Mit dem Ansatz $\varphi_{PN} = \Phi_N e^{i\omega t}$ folgt

$$\varphi_{PN} = \left(\frac{p}{l_{\text{red}}}\frac{-\nu^2}{\omega^2 - \nu^2 + 2\delta\nu i} + \frac{2\delta\nu i}{\omega^2 - \nu^2 + 2\delta\nu i} + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \nu^2 + 2\delta\nu i}\right)\Psi e^{i\omega t} \quad (2.18)$$

Eingesetzt in (2.13a) und mit den Abkürzungen $D = \frac{\delta}{\omega}$ und $\eta' = \frac{\nu}{\omega}$ wird

$$x_N = \left[p\Psi - r\Psi\left(\frac{p}{l_{\text{red}}}\frac{-\eta'^2}{1 - \eta'^2 + 2D\eta'i} + \frac{2D\eta'i}{1 - \eta'^2 + 2D\eta'i} + \frac{1}{1 - \eta'^2 + 2D\eta'i}\right)\right]e^{i\omega t}$$

Das Amplitudenverhältnis ist

$$V_N = \frac{x_{N\text{max}}}{p\Psi} = 1 - \frac{r}{l_{\text{red}}}\left(\frac{-\eta'^2}{1 - \eta'^2 + 2D\eta'i} + \frac{l_{\text{red}}}{p}\frac{2D\eta'i}{1 - \eta'^2 + 2D\eta'i} + \frac{l_{\text{red}}}{p}\frac{1}{1 - \eta'^2 + 2D\eta'i}\right). \quad (2.19)$$

Setzt man

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{-\eta'^2}{1 - \eta'^2 + 2D\eta'i} \quad (2.20a)$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{2D\eta'i}{1 - \eta'^2 + 2D\eta'i} \quad (2.20b)$$

$$\mathfrak{B}_3 = \frac{1}{1 - \eta'^2 + 2D\eta'i} \quad (2.20c)$$

mit

$$\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3 = 1. \quad (2.20d)$$

so wird aus (2.19)

$$V_N = \frac{x_{N\max}}{p\Psi} = 1 - \frac{r}{l_{\text{red}}} \left[1 + \left(\frac{l_{\text{red}}}{p} - 1 \right) (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3) \right]. \quad (2.19a)$$

Für $p \rightarrow \infty$ wird aus der Nickbewegung eine Hubbewegung, es ist $p\Psi = x_H$, $p\Psi = X$ (Amplitude der Hubbewegung), und aus dem Vergrößerungsverhältnis (2.19a) wird

$$V_H = \frac{x_{H\max}}{X} = 1 - \frac{r}{l_{\text{red}}} \mathfrak{B}_1. \quad (2.19b)$$

Abb. 7b zeigt die Vektordarstellung, Abb. 7a das Amplitudenverhältnis $V_H = 1 - \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3$ für $\frac{r}{l_{\text{red}}} = 1$ und V_N ist dann $V_N = \left(1 - \frac{l_{\text{red}}}{p}\right) (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3) = \left(1 - \frac{l_{\text{red}}}{p}\right) V_H$. Nickbewegungen beeinflussen die Antenne stärker als Hubbewegungen, wenn $\frac{l_{\text{red}}}{p} < 0$ und $\frac{l_{\text{red}}}{p} > 1$ ist.

Es muß $1/l_{\text{red}} \neq 0$ sein, sonst wird nach (2.19b) $V_H = 1$, d. h. die Antenne macht den vollen Ausschlag der Hubbewegung mit. Darum wurde auf S. 232 $q = 0$ gesetzt.

Zusammenfassend ergibt sich also: Wird das Pendel harmonisch erregt, so wird die im Schwingungsmittelpunkt angebrachte Antenne dann wenig beeinflusst, wenn das Frequenzverhältnis $\eta' = \frac{\nu}{\omega}$ möglichst groß und das Dämpfungsmaß D klein ist. Den günstigsten Fall $D = 0$ (Pendel ohne Dämpfung) kann man nicht in Betracht ziehen, weil bei stoßartigen Erschütterungen Pendeleigenschwingungen angefacht werden. Durch eine Dämpfung sollen diese rasch abklingen, ehe neue amplitudenvergrößernde Erregungen auftreten. $D = 0,2$ vergrößert V_H nicht sehr, während die Eigenschwingungsamplitude wirksam abnimmt. (Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Scheitelwerte gleichen Vorzeichens für $D = 0,2$ ist 3,53 : 1). Die im Schwingungsmittelpunkt befestigte Antenne bleibt nach Abb. 7a nur bei unendlich hoher Erregerfrequenz in Ruhe. Deshalb muß man, da auch langsamere Störbewegungen auftreten, bei denen die Antenne ausschlägt, einen gewissen Fehler zulassen. Bei einer vorgegebenen Abweichung von z. B. 5% bei Huberregung ermittelt sich das niedrigste Frequenzverhältnis η' aus $V_H \left(D = 0, \frac{r}{l_{\text{red}}} = 1 \right) = 1 + \frac{\eta'^2}{1 - \eta'^2}$ zu $\eta' = 4,56$. Um bei gleichem Fehler den Frequenzbereich

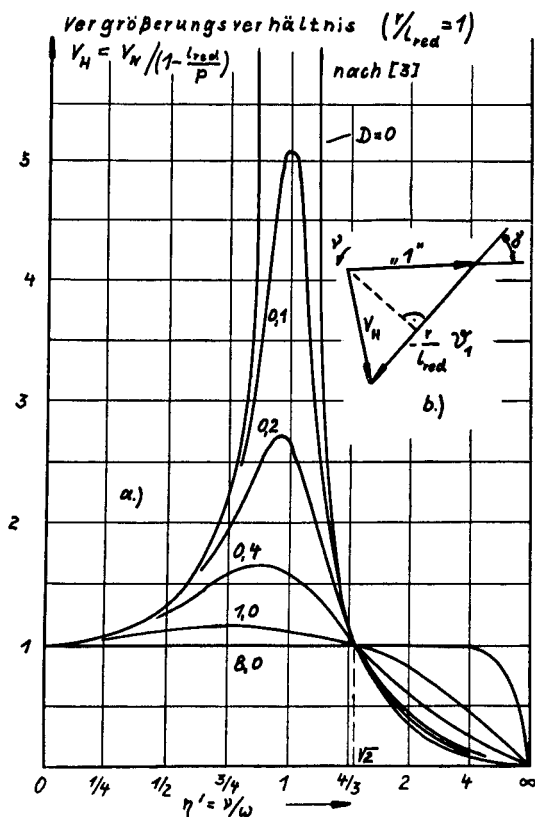


Abb. 7. a) Amplituden-Vergrößerungs-Verhältnis,
 b) vektorielle Darstellung von 2.19 b

zu vergrößern, bringt man die Antenne in einem Abstand $r < l_{red}$ an, der sich aus $V_H(\eta' \rightarrow \infty) = 1 - \frac{r}{l_{red}} = 0,05$ zu $\frac{r}{l_{red}} = 0,95$ bestimmt. Daraus folgt ein $\eta' = 3,27$. Daß es günstiger ist, $r/l_{red} < 1$ zu wählen, konnte man schon aus Abb. 7b am gedämpften Pendel erkennen. Wird nämlich r/l_{red} bei einem η' so gewählt, daß V_H senkrecht $\left(-\frac{r}{l_{red}} \mathfrak{B}_1\right)$ steht, so ist V_H am kleinsten.

Die Pendeleigenfrequenz ω ergibt sich aus der kleinsten Erregerfrequenz ν . Sollen Betonstraßen (Fugenabstand = Wellenlänge $L = 15$ m) bei einer Geschwindigkeit von $v = 20$ m/sec vermessen werden, so ist $\nu/2\pi = 1,33$ Hz.

Mit dem obigen Wert $\eta' = 3,27$ wird $\omega/2\pi = 0,407$ Hz.

Bisher wurden die Einwirkungen auf das Pendel als rein harmonisch angesehen. Um eine allgemeine Aussage zu machen, wird die Bewegungsgleichung des Pendels (2.12) zweimal integriert

$$\varphi = \frac{1}{l_{red}} [x_R + p\psi] + 2D\omega \int (\psi - \varphi) dt + \omega^2 \int \int (\psi - \varphi) dt dt.$$

Der Ausschlag der Antenne ist nach (2.13) $x = x_R + p\psi - r\varphi$

$$x = \left(1 - \frac{r}{l_{\text{red}}}\right)(x_R + p\psi) - 2D\omega r \int (\psi - \varphi) dt - \omega^2 r \int \int (\psi - \varphi) dt dt \quad (2.21)$$

für $r/l_{\text{red}} = 1$ ist der auf l_{red} bezogene Ausschlag der Antenne

$$\frac{x}{l_{\text{red}}} = -2D\omega \int (\psi - \varphi) dt - \omega^2 \int \int (\psi - \varphi) dt dt. \quad (2.21a)$$

Danach wird auch für nicht harmonische Störbewegungen der Ausschlag der Antenne gering, wenn ω und D klein gewählt werden, falls ψ gegenüber der Eigenschwingung eine schnelle Bewegung ist.

2.22 Einfluß der Aufbaueigenschwingungen auf die Antenne. Auch dieser Einfluß soll möglichst null sein. Gegenüber dem vorigen Abschnitt stellen die Aufbaueigenbewegungen Erregerschwingungen bestimmter Frequenzen dar.

Ist nach Abb. 6 der Punkt *Sch*, der im Abstand r^* vom Pendellager *B* liegt, momentan in Ruhe $x = 0$, so wird nach (2.13)

$$0 = x_B - r^* \varphi_p; \quad r^* = \frac{x_B}{\varphi_p}. \quad (2.22)$$

Ist $x_B = f(t)$ sowie $\varphi_p = g(t)$, so ist r^* mit der Zeit veränderlich. Danach muß die Antenne — da sie fest am Pendelarm sitzt — im allgemeinen ausschlagen. Ist dagegen $f(t) = \pm a g(t)$ mit der Konstanten a , so wäre r^* von der Zeit unabhängig, *Sch* also ein Schwingungsknoten, in dem man die Antenne befestigen könnte. Diese Beziehung gilt im allgemeinen nur bei einem Pendel ohne Dämpfung (sonst besteht zwischen x_B und φ_p noch eine Phasenverschiebung, s. Abb. 7b), das durch eine harmonische Schwingung erregt wird.

Bei der Nickschwingungserregung $\psi = \Psi \sin \nu_i t$ errechnet sich die Lage des Schwingungsknotens aus $x_B = p\psi = p\Psi \sin \nu_i t$ und der Partikularlösung (2.18) für $\delta = 0$:

$$\varphi_{pN} = \frac{p\Psi}{l_{\text{red}}} \frac{1 - l_{\text{red}}/p \cdot \eta_i^2}{1 - \eta_i^2} \sin \nu_i t \quad (2.18a)$$

$$\text{zu} \quad r_{Ni}/l_{\text{red}} = (1 - \eta_i^2) \left/ \left(1 - \frac{l_{\text{red}}}{p} \eta_i^2\right) \right. \quad (2.22a)$$

Mit $\eta_i = 1/\eta_i' = \frac{\omega}{\nu_i}$. Für $p \rightarrow \infty$ und mit $x_B = p\psi = x_R$ ergibt sich die Lage des Schwingungsknotens bei Huberregung zu

$$\frac{r_{Hi}}{l_{\text{red}}} = 1 - \eta_i^2. \quad (2.22b)$$

Bei einer Erregerschwingung existiert also ein Schwingungsknoten. (Auswertung in Abb. 8.) Beim gekoppelten Trägerfahrzeug wirken dagegen immer zwei Eigenschwingungen nach (2.5a) und (2.5b) auf das Pendel ein. Mit

$$x_B = x_R + p\psi = \sum_{i=1}^2 X_i \cos(\nu_i t + \gamma_i) + p \sum_{i=1}^2 \alpha_i X_i \cos(\nu_i t + \gamma_i)$$

und der Partikularlösung entsprechend (2.18a)

$$\varphi_p = \sum_{i=1}^2 \frac{X_i}{l_{\text{red}}} \frac{1}{1 - \eta_i^2} \cos(\nu_i t + \gamma_i) + p \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i X_i}{l_{\text{red}}} \frac{1 - l_{\text{red}}/p \cdot \eta_i^2}{1 - \eta_i^2} \cos(\nu_i t + \gamma_i) \quad \text{ist}$$

$$\frac{r^*}{l_{\text{red}}} = \frac{X_1 \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + X_2 \cos(\nu_2 t + \gamma_2) + \alpha_1 X_1 \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + \alpha_2 X_2 \cos(\nu_2 t + \gamma_2)}{\frac{l_{\text{red}}}{r_{H_1}^*} X_1 \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + \frac{l_{\text{red}}}{r_{H_1}^*} X_2 \cos(\nu_2 t + \gamma_2) + \frac{l_{\text{red}}}{r_{N_1}^*} \alpha_1 X_1 \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + \frac{l_{\text{red}}}{r_{N_1}^*} \alpha_2 X_2 \cos(\nu_2 t + \gamma_2)} \quad (2.22c)$$

r^* wäre nur dann von der Zeit unabhängig, wenn $r_{H_1}^* = r_{H_2}^* = r_{N_1}^* = r_{N_2}^*$ ist, d. h. wenn alle Schwingungsknoten der Einzelbewegungen in einem Punkt zusammenfielen (s. gestrichelte Linie Abb. 8). Dies ist aber unmöglich, da $\nu_1 \neq \nu_2$.

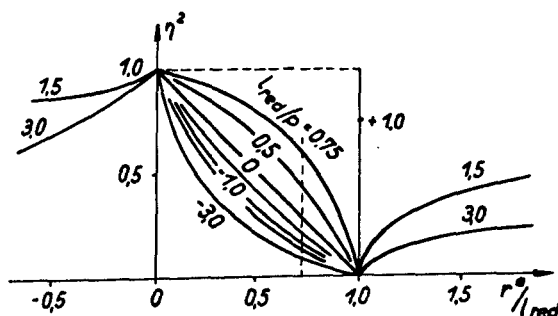


Abb. 8. Abhängigkeit der Lage des Schwingungsknotens vom Frequenzverhältnis

Für das entkoppelte Trägerfahrzeug ist dies jedoch zu erfüllen. Mit $x_B = X \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + p\psi \cos(\nu_2 t + \gamma_2)$ nach (2.6a) und (2.6b) und

$$\varphi_p = \frac{X}{l_{\text{red}}} \frac{1}{1 - \eta_1^2} \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + \frac{p\psi}{l_{\text{red}}} \frac{1 - \frac{l_{\text{red}}}{p} \eta_2^2}{1 - \eta_2^2} \cos(\nu_2 t + \gamma_2)$$

wird

$$\frac{r^*}{l_{\text{red}}} = \frac{X \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + p\psi \cos(\nu_2 t + \gamma_2)}{\frac{l_{\text{red}}}{r_{H_1}^*} X \cos(\nu_1 t + \gamma_1) + \frac{l_{\text{red}}}{r_{N_1}^*} p\psi \cos(\nu_2 t + \gamma_2)} \quad (2.22d)$$

Ist

$$r_{H_1}^*/l_{\text{red}} = r_{N_1}^*/l_{\text{red}} = 1 - \eta_1^2 = (1 - \eta_2^2)/(1 - l_{\text{red}}/p \cdot \eta_2^2) \quad (2.23)$$

so ist der Punkt im Abstand $r_{H_1}^* = r_{N_1}^*$ von B ein Schwingungsknoten, in dem die Antenne anzubringen ist und damit unbeeinflusst bleibt.

(2.23) gilt nach den Voraussetzungen nur dann, wenn die Eigenschwingungen des Pendels und des Aufbaues vom Trägerfahrzeug harmonisch, also ungedämpft sind. Damit aber die Eigenschwingungen schon abgeklungen sind, bevor weitere Erregungen sie erneut anfachen, müssen auch hier Dämpfungen angebracht werden. Dann gibt es, wie anfangs erwähnt, durch die allgemein von Null oder π verschiedenen Phasenwinkel keinen Schwingungsknoten, sondern nur einen mit der Zeit seine Lage verändernden Momentanpol. Wird mit dem nach oben günstigen entkoppelten Trägerfahrzeug weitergerechnet, so lautet die Differentialgleichung (2.12) mit der komplex geschriebenen Erregung nach (2.6a) und (2.6b), $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ gesetzt:

$$x_R = X e^{-\lambda_1 t} e^{i \nu_1 t}; \quad \psi = \Psi e^{-\lambda_2 t} e^{i \nu_2 t}$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \delta \dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = \frac{X}{l_{\text{red}}} [-\lambda_1 + i \nu_1]^2 e^{(-\lambda_1 + i \nu_1)t} + \\ + \frac{p \Psi}{l_{\text{red}}} \left[(-\lambda_2 + i \nu_2)^2 + 2 \delta \frac{l_{\text{red}}}{p} (-\lambda_2 + i \nu_2) + \frac{l_{\text{red}}}{p} \omega^2 \right] e^{(-\lambda_2 + i \nu_2)t}.$$

Für die Nickerregung allein ($x_R = 0$) lautet der Ansatz mit dem Phasenwinkel ε_2

$$\varphi_{pN} = \Phi_N e^{-\lambda_2 t} e^{i(\nu_2 t + \varepsilon_2)}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung und mit $\Omega^2 = \omega^2 - \delta^2$ (2.15)

$$\Phi e^{i \varepsilon_2} = \frac{p}{l_{\text{red}}} \Psi \frac{\left(\lambda_2^2 - \nu_2^2 - \frac{l_{\text{red}}}{p} 2 \delta \lambda_2 + \frac{l_{\text{red}}}{p} \omega^2 \right) - 2 i \nu_2 \left(\lambda_2 - \frac{l_{\text{red}}}{p} \delta \right)}{[(\lambda_2 - \delta)^2 - \nu_2^2 + \Omega^2] + 2 \nu_2 (\delta - \lambda_2) i} \\ = \frac{p}{l_{\text{red}}} \Psi \frac{R_2 + i I_2}{[(\lambda_2 - \delta)^2 - \nu_2^2 + \Omega^2]^2 + 4 \nu_2^2 (\delta - \lambda_2)^2} \\ R_2 = \left(\lambda_2^2 - \nu_2^2 - \frac{l_{\text{red}}}{p} 2 \delta \lambda_2 + \frac{l_{\text{red}}}{p} \omega^2 \right) [(\lambda_2 - \delta)^2 - \nu_2^2 + \Omega^2] - \\ - 4 \nu_2^2 (\delta - \lambda_2) \left(\lambda_2 - \frac{l_{\text{red}}}{p} \delta \right) \quad (2.24a)$$

$$I_2 = -2 \nu_2 \left\{ \left(\lambda_2^2 - \nu_2^2 - \frac{l_{\text{red}}}{p} 2 \delta \lambda_2 + \frac{l_{\text{red}}}{p} \omega^2 \right) (\delta - \lambda_2) + \right. \\ \left. + \left(\lambda_2 - \frac{l_{\text{red}}}{p} \delta \right) [(\lambda_2 - \delta)^2 - \nu_2^2 + \Omega^2] \right\}. \quad (2.24b)$$

Amplitudenverhältnis und Phasenwinkel ergeben sich zu

$$A_N = \frac{l_{\text{red}} \Phi_N}{p \Psi} = \\ = \sqrt{\frac{\left(\lambda_2^2 - \nu_2^2 - \frac{l_{\text{red}}}{p} 2 \delta \lambda_2 + \frac{l_{\text{red}}}{p} \omega^2 \right)^2 + 4 \nu_2^2 \left(\lambda_2 - \frac{l_{\text{red}}}{p} \delta \right)^2}{[(\lambda_2 - \delta)^2 - \nu_2^2 + \Omega^2]^2 + 4 \nu_2^2 (\delta - \lambda_2)^2}} \quad (2.25a)$$

$$t g \varepsilon_2 = I_2 / R_2 \quad (2.25b)$$

Die entsprechenden Werte A_H und ε_1 für Huberregungen erhält man, wenn man $p \rightarrow \infty$ gehen läßt, für $p\Psi = X$ und statt des Index 2 den Index 1 setzt. Damit ist mit der Partikularlösung

$$\varphi_p = \frac{X}{l_{\text{red}}} A_H e^{-\lambda_1 t} \cos(\nu_1 t + \varepsilon_1) + \frac{p\Psi}{l_{\text{red}}} A_N e^{-\lambda_2 t} \cos(\nu_2 t + \varepsilon_2) \quad (2.26)$$

$$\frac{r^*}{l_{\text{red}}} = \frac{x_B}{\varphi_p} = \frac{X e^{-\lambda_1 t} \cos \nu_1 t + p\Psi e^{-\lambda_2 t} \cos \nu_2 t}{A_H X e^{-\lambda_1 t} \cos(\nu_1 t + \varepsilon_1) + A_N p\Psi e^{-\lambda_2 t} \cos(\nu_2 t + \varepsilon_2)} \quad (2.24d)$$

von der Zeit abhängig, so daß die Antenne, wo sie am Pendel auch befestigt sein mag, von den Eigenschwingungen des Trägeraufbaues beeinflußt wird.

Damit gibt es zunächst keinen ausgezeichneten Punkt am Pendel, an dem die Antenne anzubringen wäre. Wenn aber das Ideal des in Ruhe befindlichen Punktes (Schwingungsknoten) nicht gefunden werden kann, wird man an dem Punkt (Pseudoschwingungsknoten genannt) die Antenne befestigen, der am wenigsten ausschlägt.

Die Lage dieses Knotens ergibt sich wie folgt: Nach Abb. 6 und (2.13) ist der Ausschlag des Punktes A

$$x(t, r) = x_R + p\psi - r\varphi_p.$$

Der mittlere Ausschlag x_m während einer Schwingungsperiode $0 \leq t \leq T$

beträgt

$$x_m(r) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} x^2(t, r) dt}.$$

(Quadratische Mittel deshalb, um nur positive Werte zu mitteln). Da der Punkt gesucht wird, der insgesamt die kleinsten Ausschläge macht, ist zu bilden $\frac{d x_m(r)}{d r} = 0 \rightarrow \text{Minimum}$.

Werden die beiden Gleichungen zusammengefaßt, so ermittelt sich die Lage des Pseudoschwingungsknotens aus

$$\int_{t=0}^{t=T} \frac{\partial x^2(t, r)}{\partial r} dt = 0. \quad (2.27)$$

Für die nicht harmonischen Eigenschwingungen des gedämpften Trägerfahrzeuges kann man die Periodendauer als unendlich lang ansehen, so daß aus (2.27) wird:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial x^2(t, r)}{\partial r} dt = 0. \quad (2.27a)$$

Für das folgende Beispiel wird wieder ein entkoppeltes Trägerfahrzeug gewählt. Mit den Aufbaueigenschwingungen (2.6a), (2.6b) und der Partikularlösung (2.26), eingesetzt in (2.13) wird

$$\begin{aligned}
x(t, r) &= X e^{-\lambda_1 t} \left[\cos v_1 t - \frac{r}{l_{\text{red}}} A_H \cos(v_1 t + \varepsilon_1) \right] + \\
&\quad + p \Psi e^{-\lambda_2 t} \left[\cos v_2 t - \frac{r}{l_{\text{red}}} A_N \cos(v_2 t + \varepsilon_2) \right] \\
\frac{1}{2} \frac{\partial x^2(t, r)}{\partial r} &= x(t, r) \left[-\frac{X}{l_{\text{red}}} A_H e^{-\lambda_1 t} \cos(v_1 t + \varepsilon_1) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{p \Psi}{l_{\text{red}}} A_N e^{-\lambda_2 t} \cos(v_2 t + \varepsilon_2) \right].
\end{aligned}$$

Für die weitere Rechnung wird die Lösung folgenden Integrals benutzt:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_i + \lambda_k)t} \cos(v_i t + \varepsilon_i) \cos(v_k t + \varepsilon_k) dt = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{(\lambda_i + \lambda_k) \cos(\varepsilon_i - \varepsilon_k) - (v_i - v_k) \sin(\varepsilon_i - \varepsilon_k)}{(\lambda_i + \lambda_k)^2 + (v_i - v_k)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\lambda_i + \lambda_k) \cos(\varepsilon_i + \varepsilon_k) - (v_i + v_k) \sin(\varepsilon_i + \varepsilon_k)}{(\lambda_i + \lambda_k)^2 + (v_i + v_k)^2} \right].
\end{aligned}$$

Speziell wird benötigt

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^{\infty} e^{-2\lambda_1 t} \cos(v_1 t + \varepsilon_1) \cos v_1 t dt \\
J_2 &= \int_0^{\infty} e^{-2\lambda_2 t} \cos(v_2 t + \varepsilon_2) \cos v_2 t dt \\
J_3 &= \int_0^{\infty} e^{-2\lambda_1 t} \cos^2(v_1 t + \varepsilon_1) dt \\
J_4 &= \int_0^{\infty} e^{-2\lambda_2 t} \cos^2(v_2 t + \varepsilon_2) dt \\
J_5 &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \cos(v_1 t + \varepsilon_1) \cos v_2 t dt \\
J_6 &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \cos v_1 t \cos(v_2 t + \varepsilon_2) dt \\
J_7 &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \cos(v_1 t + \varepsilon_1) \cos(v_2 t + \varepsilon_2) dt.
\end{aligned}$$

Mit diesen Integralen wird aus Gleichung (2.27a)

$$\begin{aligned}
&-\frac{X^2}{l_{\text{red}}} A_H J_1 + \frac{X^2}{l_{\text{red}}} A_H^2 \frac{r}{l_{\text{red}}} J_3 - \frac{(p \Psi)^2}{l_{\text{red}}} A_N J_2 + \frac{(p \Psi)^2}{l_{\text{red}}} A_N^2 \frac{r}{l_{\text{red}}} J_4 \\
&- \frac{p \Psi X}{l_{\text{red}}} (A_H J_5 + A_N J_6) + 2 \frac{p \Psi X}{l_{\text{red}}} A_H A_N \frac{r}{l_{\text{red}}} J_7 = 0.
\end{aligned}$$

und die Lage des Pseudoschwingungsknotens ergibt sich zu

$$\frac{r}{l_{\text{red}}} = \frac{1}{A_H} \cdot \frac{J_1 + \left(\frac{p \Psi}{X}\right)^2 \frac{A_N}{A_H} J_2 + \frac{p \Psi}{X} \left(J_5 + \frac{A_N}{A_H} J_6\right)}{J_3 + \left(\frac{p \Psi}{X}\right)^2 \left(\frac{A_N}{A_H}\right)^2 J_4 + 2 \frac{p \Psi}{X} \frac{A_N}{A_H} J_7}. \quad (2.28)$$

Es wird von Zahlenwerten — nach denen der neue Anhänger auch ungefähr gebaut wurde — ausgegangen, die Gleichung (2.23) genügen.

$$\nu_1/2\pi = 1,55 \text{ Hz}, \nu_2/2\pi = 2,00 \text{ Hz}, \omega/2\pi = 0,32 \text{ Hz}, l_{\text{red}}/p = -0,633.$$

Weiterhin $D = 0,20$; $D_1 = \frac{\lambda_1}{\nu_H} = 0,25$ (im Fahrzeugbau üblich) $D_2 = D_1 \frac{\nu_N}{\nu_H}$.
Danach wird aus (2.28)

$$\frac{r}{l_{\text{red}}} = \frac{1}{1,0551} \cdot \frac{1,038 + 1,0637 \left(\frac{p\Psi}{X} \right)^2 - 1,784 \frac{p\Psi}{X}}{1,031 + 1,0136 \left(\frac{p\Psi}{X} \right)^2 - 1,564 \frac{p\Psi}{X}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{1,055} \cdot \frac{1 + \left(\frac{p\Psi}{X} \right)^2 - 1,78 \frac{p\Psi}{X}}{1 + \left(\frac{p\Psi}{X} \right)^2 - 1,56 \frac{p\Psi}{X}}.$$

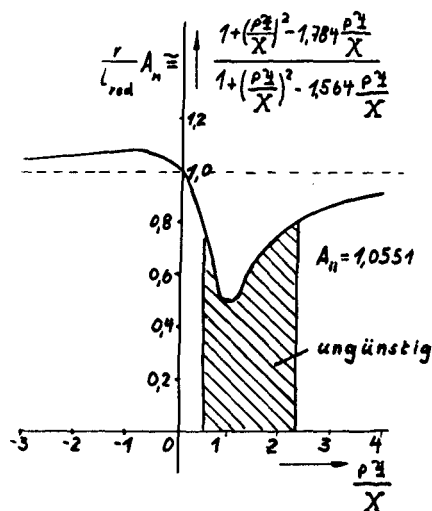


Abb. 9. Abhängigkeit der Lage des Pseudoschwingungsknotens von $\frac{p\Psi}{X}$

Abb. 9 zeigt die Auswertung. $\frac{r}{l_{\text{red}}}$ ist

praktisch nur für große $\left| \frac{p\Psi}{X} \right|$ -Werte

konstant. Da dies wünschenswert ist, wird man das Trägerfahrzeug so ausbilden müssen, daß es hauptsächlich Nickeigenschwingungen ausführt, d. h. die Aufbaumasse um den Schwerpunkt konzentrieren. Dann ermittelt sich der Befestigungsort der Antenne zu r/l_{red}

$$\approx \frac{1}{1,055}, r = 0,9479 l_{\text{red}}.$$

Nimmt man noch die Aussage auf S. 234 hinzu, daß bei einer zul. Abweichung von 5% $r = 0,95 l_{\text{red}}$ sein muß, so stimmt das

mit dem Wert des gedämpften Träger- und Pendelsystems überein. Damit wäre für das obige Beispiel der Abstand zu $r \approx 0,95 l_{\text{red}}$ festgelegt.

2.23 Zusammenfassung der Ergebnisse von 2.21 und 2.22

1. Ein zweiachsiger Anhänger wird vom ziehenden Fahrzeug wenig beeinflusst.
2. Um der Gefahr einer Instabilität zu entgehen, soll $q = 0$ sein.
3. Die Beeinflussung der Antenne durch die Unebenheiten ist gering, wenn die Pendeigenfrequenz ω gegenüber der Erregerfrequenz ν und das Dämpfungsmaß D klein ist. Um bei einer bestimmten Größe der Abweichung einen möglichst großen Bereich für die Erregerfrequenz ν zu erhalten (d. h. die Meßgeschwindigkeit braucht nicht so groß zu sein, oder es können längere Unebenheiten vermessen werden), soll $r < l_{\text{red}}$ gewählt werden. (Nach dem Beispiel auf S. 234 $r = 0,95 l_{\text{red}}$.)

4. Sollen die Aufbaueigenschwingungen des Trägerfahrzeuges die Antenne nur minimal beeinflussen, so soll das Trägerfahrzeug entkoppelt sein, Gleichung (2.23) gelten, ferner sollen die Dämpfungen am Pendel und Trägerfahrzeug klein gewählt werden. Die Antenne bringt man dann nicht im Schwingungsmittelpunkt an, sondern in einem Abstand $r < l_{\text{red}}$ (nach dem Beispiel auf S. 241 $r = 0,95 l_{\text{red}}$).

2.3 Befahren von Längsneigungen

Nach S. 234 ergab sich die Eigenfrequenz vom Pendel zu $\frac{\omega}{2\pi} = 0,407 \text{ Hz}$ und der Anbringungsort der Antenne zu $\frac{r}{l_{\text{red}}} = 0,95$. Es muß noch l_{red} bestimmt werden. Dies geschieht mit der folgenden Rechnung:

Befährt der Unebenheitsanhänger eine Längsneigung, so nimmt das Pendel gegenüber der Ebene eine neue Ruhelage ein. (S. auch [5].) Sie läßt sich nach Abb. 10 mit dem Momentensatz um B bestimmen.

$$F l' = m_p g \cos(\alpha + \vartheta) \cdot s \quad (\alpha = \text{Neigungswinkel}).$$

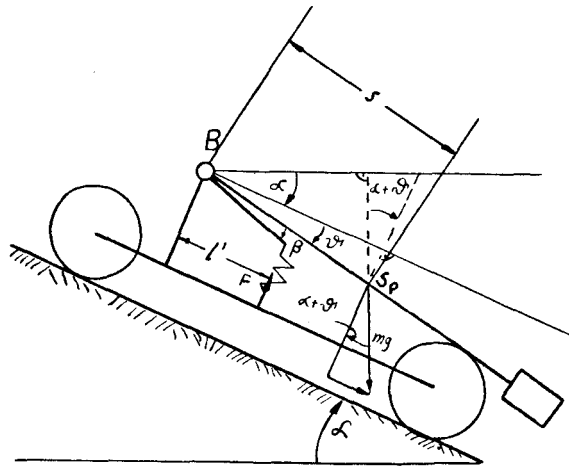


Abb. 10. Befahren einer Steigung

Konstruktiv ist der Winkel ϑ bei $\pm 6 \div 7^\circ$ durch Anschläge begrenzt. Man darf deshalb auch hier linearisieren und mit (2.11a) ergibt sich

$$c l (L - L_0) \cos \beta + c l [l \cos^2 \beta - (L - L_0) \sin \beta] \vartheta = m_p g s [\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \vartheta].$$

Mit (2.11b) wird $\left[\omega^2 + \frac{g}{l_{\text{red}}} \sin \alpha \right] \vartheta = - \frac{g}{l_{\text{red}}} (1 - \cos \alpha)$

$$- \vartheta = \frac{1 - \cos \alpha}{\omega^2 l_{\text{red}} / g + \sin \alpha} \quad (2.29)$$

Der Winkelausschlag ϑ des Pendels, unter dem sich die neue Ruhelage einstellt, hängt neben dem Neigungswinkel α von den Pendeldaten $\omega^2 l_{\text{red}}$ ab. Der dreiachsige Anhänger II, mit dem die Vergleichsversuche durchgeführt wurden und mit dem gute Erfahrungen in bezug auf Befahren von Längsneigungen vorliegen, hatte ein $\frac{\omega}{2\pi} = 0,30$ Hz und ein $l_{\text{red}} = 120$ cm. Erhöht man $\frac{\omega}{2\pi}$ auf 0,32 Hz, was sich auf die Messung der Unebenheiten nur geringfügig verschlechternd auswirkt, so verkleinert sich bei ungefähr konstantem $\omega^2 l_{\text{red}}$ das l_{red} auf 90 cm.

3. Konstruktion des Anhängers

Die obengenannte Verkleinerung von l_{red} bringt bei konstantem l_{red} (s. (2.23)) ebenfalls eine Verkleinerung von p und damit eine kleinere Länge des Trägerfahrzeuges. Die Größe $\frac{l_{\text{red}}}{p}$ hängt wiederum nach (2.23) von $\eta_1 = \frac{\omega}{\nu_1}$ und $\eta_2 = \frac{\omega}{\nu_2}$ ab. Man wird die Aufbaueigenfrequenzen des Trägerfahrzeuges ν_1 und ν_2 so wählen, daß der Rahmen wenig auf das Pendel einwirkt, daß also die Beschleunigungen der Hub- und Nickerregungen, der Nickwinkel und dessen Geschwindigkeit klein bleiben (s. 212). Nach den Erfahrungen der Fahrzeugtechnik sollen die Frequenzen $\frac{\nu_1}{2\pi}$ und $\frac{\nu_2}{2\pi}$ zwischen 1,0 ÷ 2,2 Hz, die Frequenzen der (auf S. 229 für die weitere Rechnung vernachlässigten) Achssysteme zwischen 8 ÷ 11 Hz liegen, die Reifen eine niedrige Federkonstante c_v , c_h besitzen und einseitig auf Zug wirkende Stoßdämpfer verwendet werden.

Es wurde die Pendeleigenfrequenz zu $\frac{\omega}{2\pi} = 0,320$ Hz gewählt, die Aufbaufrequenzen mit $\frac{\nu_1}{2\pi} = 1,565$ Hz und $\frac{\nu_2}{2\pi} = 2,00$ Hz festgelegt. Das ergibt ein $\frac{l_{\text{red}}}{p} = -0,693$ und mit $l_{\text{red}} = 90$ cm ein $p = -130$ cm. Damit sind die Hauptdaten des Anhängers errechnet.

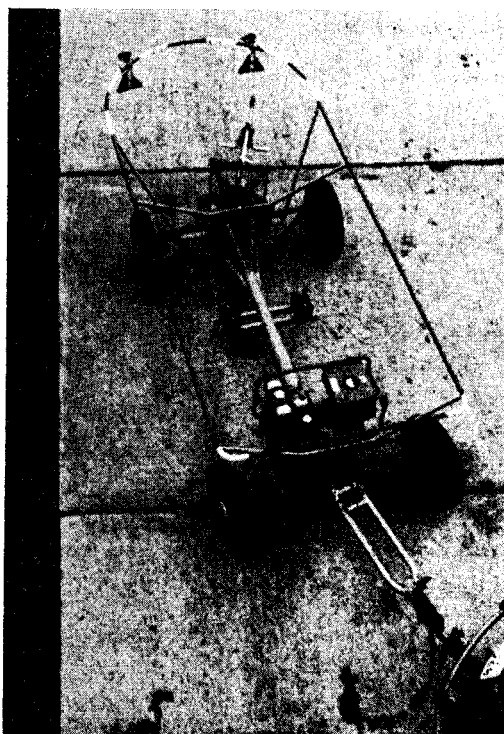


Abb. 11. Das neue Unebenheitsmeßgerät

Die konstruktive Ausführung zeigt Abb. 11. Die Räder wurden möglichst groß gewählt, damit sie nicht „in jedes Loch hineinfallen“. Damit sich der Aufbau des Trägerfahrzeuges bei Kurvenfahrt nicht neigt und sich dadurch die Antenne nicht von der Fahrbahn entfernt (ähnlich wie beim Befahren von Längsneigungen), wurden die Achsaufhängungen so ausgebildet, daß der Schwerpunkt des Aufbaues auf der Rollachse liegt (Rollachse ist die Verbindungsgerade der Momentanpole der Vorder- und Hinterradaufhängungen). Der Anlenkpunkt B des Pendels liegt in Fahrtrichtung vor dem Schwerpunkt S_p , um durch den Fahrtwind eine stabilisierende Wirkung zu erreichen. Die Achsschenkelenkung des Anhängers wurde so ausgelegt, daß der Anhänger bei hohen Geschwindigkeiten möglichst dem Zugfahrzeug gerade ohne Schlangebewegungen nachläuft.

4. Kennzeichnung von Straßenunebenheiten

Ziel der Messung von Fahrbahnunebenheiten ist es stets, die Beschaffenheit der Fahrbahnoberfläche festzustellen, um sie nach Möglichkeit so zu beeinflussen, daß sowohl die Fahrzeuge, die Insassen und das Ladegut als auch die Straße selbst durch den Betrieb geschont werden. Die Folgen von Straßenunebenheiten sind nämlich:

1. Wirkungen auf den „gefederten“ Fahrzeugteil (Insassen, Ladegut).
2. Wirkungen auf die „ungefederten“ Fahrzeugteile: Änderung der Ruhelast durch dynamische Zusatzbe- und entlastung und damit einerseits zusätzliche Fahrbahnbeanspruchung, andererseits Minderung des Kraftschlusses Rad – Fahrbahn.

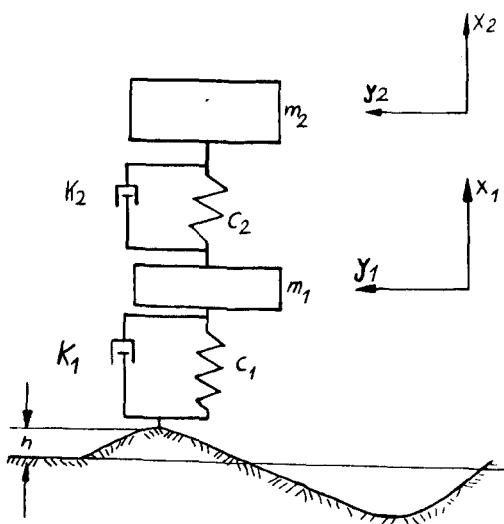


Abb. 12. Federgekoppeltes System (Ersatzschema für Kraftwagen)

m_1 Achsmasse	m_2 anteilige Aufbaumasse
c_1 Federkonstanten der Reifenederung	c_2 Federkonstanten der Achsfederung
k_1 Dämpfungskonstanten der Reifendämpfung	k_2 Dämpfungskonstanten der Achsdämpfung

Maßgebend für die Wirkung der Unebenheiten sind deshalb nicht nur deren Form, Größe und örtliche Folge, sondern auch die Bauart der Fahrzeuge (Federungen, Dämpfungen, Massen, Trägheitsmomente) und die Fahrgeschwindigkeit.

Um diese Wirkungen festzustellen, muß man das dynamische Verhalten der Fahrzeuge und die physiologischen Eigenschaften der Insassen kennen. Berücksichtigt man Durchschnittswerte, so ist es möglich, gewisse Grenzwerte zu ermitteln, unterhalb derer die genannten Wirkungen erträglich (aber nicht wirkungslos) bleiben.

Als Ersatzschema für einen Kraftwagen wird das in Abb. 12 gezeichnete federgekoppelte Zweimasensystem verwendet.

Dabei wird die Wank- und Nickbewegung des Kraftwagens vernachlässigt und nur die Hubbewegung berücksichtigt. Dies hat auf die dynamischen Radlastschwankungen kaum einen Einfluß, kann dagegen bei der Beurteilung des Schwingempfindens des Menschen zu Fehlern führen. Da die Empfindlichkeit gegenüber Wanken kleiner ist als gegenüber Hubbewegungen bei Erregerfrequenzen über 5 Hz [16]*), und da über die Einwirkung von Nickschwingungen auf den Menschen weniger Versuchsergebnisse vorliegen, kann man zur Vereinfachung das Ersatzschaubild für die Berechnung benutzen. Weiterhin wird die Sitzfederung vernachlässigt, was sich ebenfalls nur auf die Schwingempfindlichkeit des Menschen auswirkt. Durch einen kleinen Versuch kann man sich davon überzeugen, daß es bei angelehntem Rücken schwierig ist, sich in „Resonanz zu schaukeln“. (Wahrscheinlich deshalb, weil die Sitzfederung vertikal, die Federung der Rückenlehne aber fast nur horizontal wirkt.) Das bedeutet, daß der Mensch die Bewegungen der Aufbaumasse fast ungeändert mitmacht, wenn er sich „entspannt rückwärts anlehnt“.

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m_2 \ddot{x}_2 = c_2 (x_1 - x_2) + k_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (4.1)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_2 (x_1 - x_2) - k_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1 (h - x_1) + k_1 (\dot{h} - \dot{x}_1). \quad (4.2)$$

x_2 und x_1 sind die Bewegungen der Aufbau- und Achsmasse, h ist die Unebenheitsfunktion. Weiterhin wurde ein linear geschwindigkeitsabhängiges Dämpfungsgesetz zugrunde gelegt, was für die Reifen annähernd richtig [19] und bei Achsdämpfung ebenfalls anzutreffen ist.

Auch die Unebenheitsfunktion h wird vereinfacht angenommen. In der Fahrbahn sind periodische Unebenheiten und statistisch verteilte Einzelhindernisse enthalten. Unebenheitsperiodizitäten trifft man nicht nur auf Betonstraßen mit gleichem Fugenabstand an, die sich nach einiger Zeit durch Plattensetzen ausbilden. Die Wellenlängen von Wellenstraßen liegen einmal zwischen 8 und 13 m und zum anderen herrührend von den Achseigenfrequenzen nach [18] zwischen $1,5 \div 2,5$ m. Aus Abb. 4 wurde mittels der Periodogrammanalyse ([20], [21]) ein harmonischer Anteil der Unebenheiten erfaßt. Die Wellenlänge beträgt 12,54 m, die Amplitude 0,95 cm.

Periodische Unebenheitsfunktionen als Erregung für den Kraftwagen bieten rechnerisch nicht die großen Schwierigkeiten, die einem durch die statistisch verteilten Einzelhindernisse bereitet werden (s. [13]). Deshalb wird als Annäherung eine einzelne Erhebung oder Vertiefung angenommen werden. In [8] und [12] wurde rechnerisch und nach [22] durch Fahrversuche gezeigt, daß die Form von Einzelhindernissen gegenüber deren Höhe und Länge eine untergeordnete Rolle spielt. Darum wird die Unebenheitsfunktion durch die Gleichung dargestellt:

$$h = H \sin \omega t \quad (4.3) \quad \text{wobei } \omega = 2\pi \frac{v}{L} \quad (4.4)$$

v = Fahrgeschwindigkeit L = Wellenlänge H = Hindernishöhe
(Amplitude)

für das Einzelhindernis ist für $y \leq 0$ und $y \geq L/2$, $h = 0$.

*) Niedrigen Erregerfrequenzen entsprechen bei normaler Fahrgeschwindigkeit lange Unebenheiten, die meistens auch so breit sind, daß beide Räder einer Achse gleich beeinflusst werden.

4.1. Schwingempfinden beim Befahren von Wellenstraßen

Für die Berechnung, die zunächst an einem Beispiel gezeigt wird, benötigt man zwei Beziehungen: den Zusammenhang zwischen Wellenstraße und Aufbaubeschleunigung nach Abb. 13 (entnommen aus [12]) und die Abhängigkeit zwischen Aufbaubeschleunigung und Schwingempfinden des Menschen nach Abb. 14. (S. [17] geht teilweise auf die Versuche [14] und [16] zurück, bei

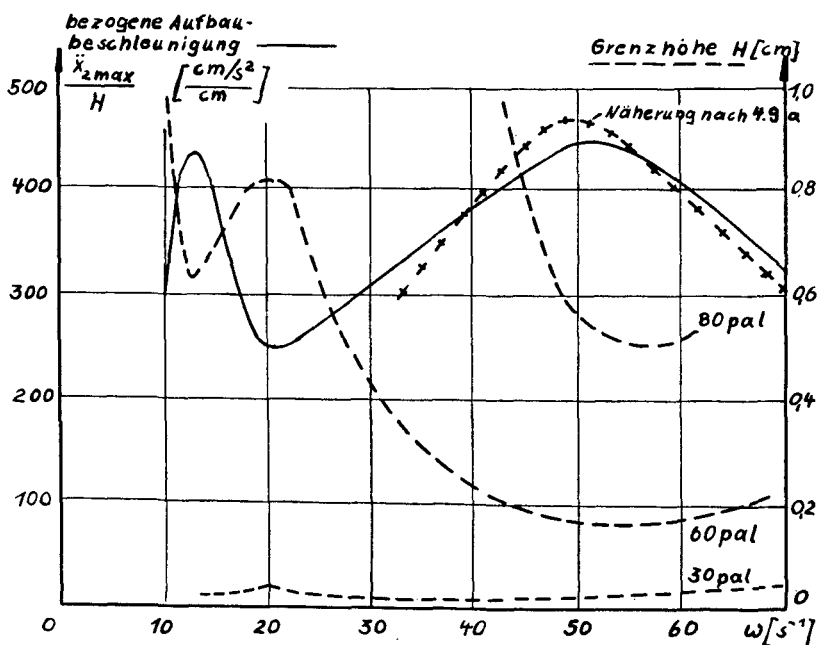


Abb. 13. Aufbaubeschleunigungen und Grenzhöhen für verschiedene Schwingempfindungen beim Befahren von Wellenstraßen

denen die den Erschütterungen ausgesetzten Menschen nach 5 bzw. 8 min über ihr Befinden urteilen mußten). Die Schwingempfindungsstärke wird dabei in pal gemessen.

Wird nun die Aufbaubeschleunigung zur Schwingbeschleunigung bei einer bestimmten Schwingempfindungsstärke nach Abb. 14 in Beziehung gesetzt, so ergibt sich die Amplitude der Wellenstrecke H bei einem bestimmten Fahrzeug aus

$$\frac{\ddot{x}_2(\omega)_{\max}}{H} \cdot H = b(\omega, \text{pal}) . \quad (4.5)$$

In Abb. 13 wurde auch die Funktion $H = f(\omega)$ für verschiedene pal-Stärken aufgetragen. Daraus ersieht man, daß die Höhe H für 30 pal, also für ruhigen Fahrzeuglauf so kleine Werte ergibt, die der Straßenbauer kaum ausführen kann. Die Kurve für 60 pal, die einer für den Menschen kurzzeitig ertragbaren

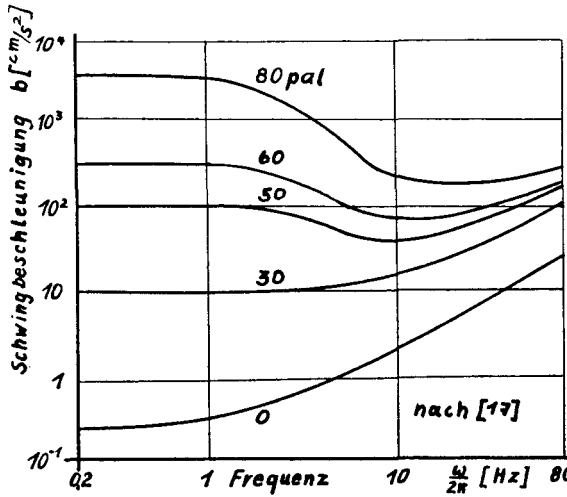


Abb. 14. Kurven gleicher Schwingempfindungsstärke in Abhängigkeit von Beschleunigung und Frequenz
 Es bedeuten
 0 ÷ 10 pal Schwingungen unterhalb der Wahrnehmungsschwellen
 30 ÷ 40 pal Schwingungen in ruhig laufenden Fahrzeugen
 40 ÷ 50 pal sonstige, noch ertragbare Schwingungen in Fahrzeugen
 50 ÷ 60 pal für den Menschen kurzzeitig ertragbare Schwingungen
 60 ÷ 80 pal Schwingungen, die physische Störungen auslösen

Schwingempfindung entsprechen soll, ergibt in Achsresonanznähe Amplituden von $H = 2$ mm, also Gesamthöhen von 4 mm, für 80 pal eine Gesamthöhe von 10 mm. Damit wird die in [23] geschilderte Erfahrung bestätigt, daß Fahrzeuginsassen eine Wellenstraße von $H = 5 \div 8$ mm und $L = 1,5 \div 2,5$ m als schlecht empfanden, während der Straßenbauer wegen der geringen Unebenheitshöhen keinen Anlaß sah, diese auszubessern.

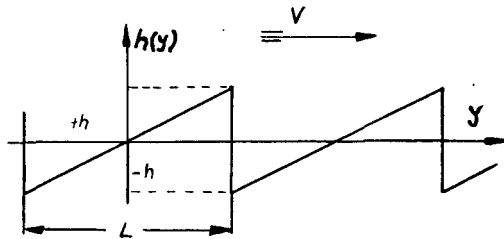


Abb. 15. Unebenheitsfunktion von ausgefahrenen Betonstraßen

Im Gebiet der Aufbauresonanz ergibt sich nach Abb. 13 für 60 pal eine Unebenheitsamplitude von 0,63 cm. Wird dies für ausgefahrene Betonstraßen nachgeprüft, deren Unebenheitsfunktion sich erfahrungsgemäß nach Abb. 15 darstellen läßt, so heißt die Unebenheitsfunktion in Abhängigkeit von der Fahrgerichwindigkeit

$$h(t) = \frac{2h}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - + \dots \right). \quad (4.6)$$

Ist die 1. Erregerfrequenz ω gleich der Aufbaufrequenz (≈ 2 Hz), so ist bei 60 pal Schwingempfindungsstärke $H_1 = 2 h/\pi = 0,63$ cm, also $h = 0,99$ cm. D. h. soll die Senkung an der Fuge (für Fahrzeuginsassen kurzzeitig) ertragbar sein, so darf sie nicht mehr als 2 cm insgesamt betragen. Bei schlechten Betonstraßen ist dieser Plattenversatz in der genannten Größe zu finden.

Man darf wohl feststellen, daß Erfahrung und Rechnung bei Annahme einer Schwingempfindungsstärke von 60 pal übereinstimmen. Um nun allgemeinere Aussagen machen zu können, darf nicht mehr wie in Abb. 13 ein bestimmtes Schwingungssystem für die Berechnung verwendet, sondern es müssen mehrere Systeme, bei denen hauptsächlich Federkonstanten und Massengrößen zu variieren sind, betrachtet werden.

Die Aufbaubeschleunigung bei Achsresonanz ist nach [11] ungefähr

$$\left(\frac{\ddot{x}_{2\max}}{H}\right)_I \cong \frac{1}{2} v_I^2 \frac{v_{II}}{v_I} \left[1 - \left(\frac{v_{II}}{v_I}\right)^2 \right] \mu \frac{\sqrt{(2D_2)^2 + (v_{II}/v_I)^2}}{D_1 + D_2} \frac{v_{II}}{v_I} \mu \frac{1 + (v_{II}/v_I)^2}{\sqrt{1 - (v_{II}/v_I)^2} \mu} \quad (4.7)$$

bei Aufbauresonanz

$$\left(\frac{\ddot{x}_{2\max}}{H}\right)_{II} \cong \frac{1}{2} v_{II}^2 \frac{\sqrt{(2D_2)^2 + \frac{1 + (v_{II}/v_I)^2}{1 - (v_{II}/v_I)^2} \mu}}{D_1 (v_{II}/v_I)^3 \frac{1 + \mu}{(\sqrt{1 - (v_{II}/v_I)^2} \mu)^3} + D_2} \quad (4.8)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} v_I^2 &= \frac{c_1 + c_2}{m_1} & 2D_1 &= \frac{k_1}{\sqrt{m_1 c_1}} = \frac{k_1}{m_1 v_I'} & v_I' &= \frac{c_1}{m_1} = v_I^2 - \frac{c_2}{m_1} \\ v_{II}^2 &= \frac{c_2}{m_2} & 2D_2 &= \frac{k_2}{\sqrt{m_2 c_2}} = \frac{k_2}{m_2 v_{II}} & \mu &= \frac{m_2}{m_1} \end{aligned}$$

Danach hat man für ein ganz bestimmtes Fahrzeug nur zwei Beschleunigungswerte. Weitere Werte in Resonanznähe erklärt man mit Näherungsformeln: Nach [12] kann man im Gebiet der Aufbauresonanz voraussetzen, daß die Achsmasse die volle Unebenheitsbewegung mitmacht.

Mit $x_1 = h$ wird aus (4.1)

$$m_2 \ddot{x}_2 = c_2 (h - x_2) + k_2 (\dot{h} - \dot{x}_2) \quad (4.1a)$$

Daraus ermittelt sich die max. Beschleunigung zu

$$\frac{\ddot{x}_{2\max}}{H} = v_{II}^2 \left(\frac{\omega}{v_{II}}\right)^2 \sqrt{\frac{1 + (2D_2)^2 \left(\frac{\omega}{v_{II}}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{v_{II}}\right)^2\right]^2 + (2D_2)^2 \left(\frac{\omega}{v_{II}}\right)^2}} \quad (4.10a)$$

Die nach (4.10a) bestimmte Näherungskurve für das Aufbauresonanzgebiet stimmt nicht gut mit der wirklichen überein. Eine bessere Übereinstimmung erreicht man mit dem Einmassensystem für die Bereiche der Achsresonanz, bei dem die Bewegung der Aufbaumasse m_2 vernachlässigt wird. $(x_1 - x_2) \approx x_1$; $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \approx \dot{x}_1$

$$m_2 \ddot{x}_2 \approx c_2 x_1 - k_2 \dot{x}_1 \quad (4.1b)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 \approx c_1 (h - x_1) + k_1 (\dot{h} - \dot{x}_1) - c_2 x_1 - k_2 \dot{x}_1. \quad (4.2b)$$

Die maximale Beschleunigung ermittelt sich zu

$$\frac{\ddot{x}_{2\max}}{H} = v_I^2 \frac{v_{II}}{v_I} \left[1 - \left(\frac{v_{II}}{v_I} \right)^2 \mu \right] \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{v_{II}}{v_I} \right)^2 + (2 D_2)^2 \left(\frac{\omega}{v_I} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{v_I} \right)^2 \right]^2 + \left[2 D_1 \sqrt{1 - (v_{II}/v_I)^2} \mu + 2 D_2 \frac{v_{II}}{v_I} \mu \right]^2 \left(\frac{\omega}{v_I} \right)^2}} \quad (4.9a)$$

In Abb. 13 ist die Näherungskurve eingetragen. Zwischen $33 < \omega < 70$ ist die Abweichung 7,5 %.

Mit den Gleichungen (4.7) und (4.8) erhält man in unmittelbarer Resonanznähe für ein bestimmtes Fahrzeug zwei Werte für die Aufbaubeschleunigung und mit (4.9a) und (4.10a) in der weiteren Umgebung Näherungskurven. Damit kann man mit nicht allzu großem Aufwand die Verhältnisse an mehreren Fahrzeugen durchrechnen. Als übliche Werte gelten die Aufbaueigenfrequenzen von $v_{II} = 6 \div 14^1/s$ und Achseigenfrequenzen $v_I = 50 \div 70^1/s$ nach [12]. Das Massenverhältnis μ wird von 4 bis 9 variiert. Als Dämpfungswert wird $D_2 = 0,25$ gewählt, was nach [9] und [12] im gesamten Bereich der Erregerfrequenz niedrige Beschleunigungen ergibt. Nach [19] ist bei Fahrzeugreifen $D_1 = 0,05 \div 0,10$. Es wird hier als Mittelwert 0,075 genommen.

Mit diesen Werten wurden 24 verschiedene Fahrzeuge durchgerechnet. Die auf die Unebenheitsamplitude bezogenen Aufbaubeschleunigungen wurden bei Aufbau- und Achsresonanz sowie die Näherungskurven für einige in der Beschleunigung besonders hoch oder niedrig liegende Fahrzeuge bestimmt. Dividiert man diese Werte durch die Schwingbeschleunigung bei einer Empfindungsstärke von 60 pal nach (4.5), so erhält man die Amplituden der Wellenstrecke nach Abb. 16. In diese wurde schließlich eine Mittelwertkurve eingezeichnet, die aus drei Geraden besteht. In den Gebieten der Aufbau- und Achsresonanz wurden Parallelen zur ω -Achse gezeichnet, die sich den Eigenschaften der besser gefederten Wagen (niedrige Eigenfrequenzen, große Massenverhältnisse) mehr anpaßt. (Kraftwagen mit einer Aufbaufrequenz $v_{II} = 7^1/s$ wurden nicht berücksichtigt, weil es nach [9] schwierig ist, ihnen durch die weiche Aufbaufederung eine gute Kurvenlage zu geben.) Das dritte Geradenstück verbindet die Gebiete der Aufbau- und Achsresonanz zwischen den Erregerfrequenzen $\omega = 17 \div 40^1/s$.

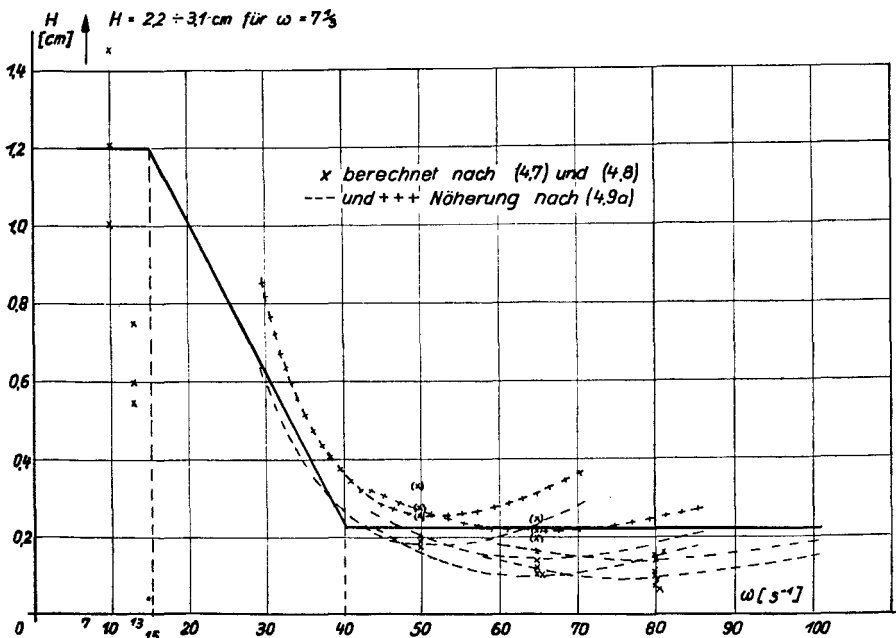


Abb. 16. Unebenheitshöhen bei einer Schwingempfindungsstärke von 60 pal und beim Überfahren von Wellenstraßen

Um beim Überfahren eines Einzelhindernisses zu ähnlichen Aussagen zu kommen, könnte man die Untersuchungen nach [15] verwenden. Jedoch kamen bei den Messungen nach [24] die für den Menschen als unbedingt schädlich angesehenen Werte dauernd vor, ohne daß die geringsten Schädigungen der Versuchspersonen festgestellt werden konnten. Dies wird darauf zurückgeführt, daß die Umgebung und sonstige Ablenkung des fahrenden Menschen die Empfindlichkeit erheblich vermindert.

Damit sind die Messungen [15] nicht auf das Kraftfahrzeug anwendbar, es wird deshalb auf entsprechende Rechnungen verzichtet. Es steht aber fest, daß eine einmalige oder nur wenige Male hintereinander vorkommende Erschütterung längst keine so große Wirkung auf den Menschen ausübt, wie eine dauernde. So kann man, wenn man die obige Einteilung der Hindernisarten benutzt, beim Einzelhindernis mit einer geringeren Empfindlichkeit des Menschen rechnen als bei einer Wellenstraße gleicher Unebenheitsform und -größe.

4.2 Dynamische Radlasten

Während bei den Überlegungen des vorigen Abschnittes an Kraftwagen zur Personenbeförderung gedacht wurde, weil hier die Beachtung der Schwingempfindung besonders wichtig ist, sollen in diesem Abschnitt nur schwere Fahrzeuge betrachtet werden. Diese verursachen große vertikale Kräfte; ferner sind die dynamischen Zusatzlasten der Schwerfahrzeuge, die meistens ohne Stoßdämpfer ausgerüstet sind, gegenüber denjenigen Fahrzeugen mit Stoß-

dämpfer größer. Vgl. [11], [22], [25] und [26]. Deshalb werden nur Fahrzeuge ohne Achsdämpfung betrachtet und als weiteres Maß für die Kennzeichnung der Straßenunebenheiten wird der Stoßfaktor n genommen, der als Verhältnis der maximalen zwischen Reifen und Fahrbahn wirkenden Kraft (Fahrbahnkraft) zur statischen Belastung P_{stat} definiert wird. Mit $P(\omega)$ als dynamischen Zusatzlast ergibt sich formelmäßig

$$n = \frac{P_{\text{stat}} + P(\omega)_{\text{max}}}{P_{\text{stat}}} = 1 + \frac{P(\omega)_{\text{max}}}{P_{\text{stat}}}, \quad (4.11)$$

wird $P_{\text{stat}} = c_1 f_{\text{stat}}$ eingesetzt (f_{stat} = statische Reifeneindrückung), so ist

$$n = 1 + \frac{H}{f_{\text{stat}}} \cdot \frac{P(\omega)_{\text{max}}}{c_1 H}, \quad (4.11a)$$

und danach wird die Berechnung des Stoßfaktors auf die Ermittlung des dimensionslosen Faktors $\frac{P(\omega)_{\text{max}}}{c_1 H}$ zurückgeführt.

Beim Befahren von Wellenstraßen ist nach [11] die Amplitude der auf $c_1 H$ bezogenen Fahrbahnkraft in unmittelbarer Nähe der Achsresonanz mit $k_2 = 0$ und den Abkürzungen auf S. 248

$$\left(\frac{P}{c_1 H}\right)_I = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{v_{II}}{v_I}\right)\mu}{1 + \frac{(2 D_1)^2}{(2 D_1)^2}}}. \quad (4.12)$$

Wird für einen Lastwagenreifen $f_{\text{stat}} = 3,0$ cm und weiterhin ein Stoßlastfaktor von $n = 1,4$ eingesetzt, der als Durchschnittswert für mäßig schlechte Straßen und für beladene Fahrzeuge*) nach [25] angegeben wird, so kann man nach Gleichung (4.12) die zulässige Amplitude ermitteln. Aus Abb. 17 ersieht man, daß die Höhe H in derselben Größenordnung liegt, wie die in Abb. 16 für das Schwingempfinden maßgebende, so daß die Gerade im Achsresonanzgebiet (Abb. 16, Gesamthöhe $2 H = 0,45$ cm) gleichzeitig für das Schwingempfinden des Menschen sowie für die Straßenschonung als Grenzwert angesehen werden kann.

Fahrbahnkräfte, die in Nähe der Aufbauresonanz auftreten, lassen sich zu den Ergebnissen des Abschnittes 4.1 nicht in Verbindung bringen, weil Stoßfaktoren weit über 2 auftreten. Das bedeutet aber, daß die Räder von der Fahrbahn abspringen und daß damit keine geschlossene mathematische Lösung mehr möglich ist.

Berechnungen über die dynamischen Radlasten beim Überfahren von Einzelhindernissen können durch die in [22] und [25] beschriebenen Versuche nachgeprüft werden. Theoretisch ermittelte Ergebnisse sind aus der Arbeit [11]

*) Beladene Fahrzeuge ergeben größere Gesamtkräfte als unbeladene, obgleich diese höhere Stoßlastfaktoren aufweisen.

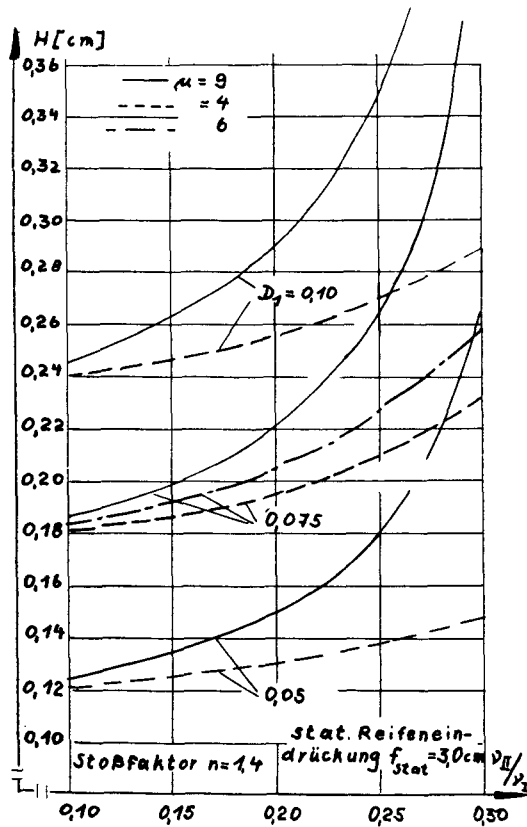
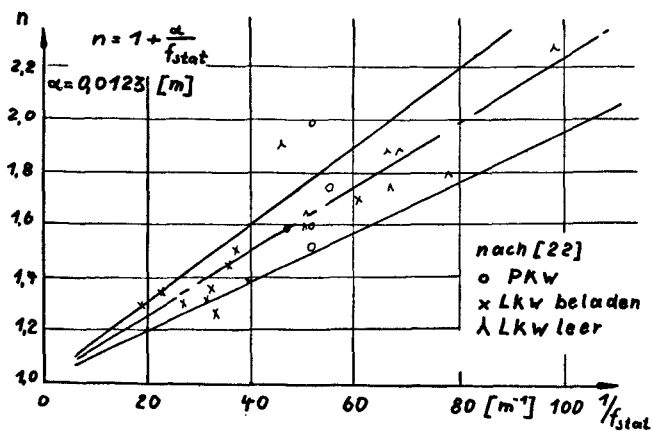
Abb. 17. Unebenheitshöhen bei einem Stoßfaktor $n = 1,4$ beim Überfahren von Wellenstraßen

Abb. 18. Stoßfaktoren, ermittelt aus Versuchen

bekannt, in der eine Hindernishöhe von $H = 5$ cm angenommen wurde. Diese Höhe ist nach den in 1. beschriebenen Unebenheitsmessungen für hohe Erregerfrequenzen, d. h. für kurze Unebenheiten, zu groß, sie betrug höchstens 1 cm. Aus den Aufzeichnungen von [22] ergab sich, daß bei dieser Höhe die Kraft, die beim Auffahren auf ein erhabenes Hindernis wirkt, größer ist als die Fahrbahnkraft, die beim Verlassen des Hindernisses auftritt. Die erste Kraft, Anstoßkraft genannt, wird am größten, wenn das Hindernis so kurz ist bzw. so schnell überfahren wird, daß die Achsmasse nicht ausgelenkt wird. Damit erreicht die dynamische Zusatzlast den Höchstwert $P(\omega) = c_1 H$ bei Vernachlässigung der Reifendämpfung, und der Stoßlastfaktor erreicht nach Gleichung (4.11a) den Wert

$$n = 1 + \frac{H}{f_{\text{stat}}} . \quad (4.13)$$

In [22] wird ein Diagramm gezeigt (s. Abb. 18), in dem sich die Versuchsergebnisse in die Formel (4.13) einordnen. (Statt H wurde in [22] ein Wert $\alpha = 1,23$ cm gesetzt.) Durch die Versuchsergebnisse begründet wird aus Gleichung (4.13) die Unebenheit für Einzelhindernisse bei hohen Erregerfrequenzen ermittelt. Mit den schon genannten Werten $f_{\text{stat}} = 3,0$ cm und $n = 1,4$ wird $H = 1,2$ cm.

4.3 Abspringen des Rades von der Fahrbahn

Während im vorigen Abschnitt 4.2 die größte zwischen Rad und Fahrbahn auf die Unebenheitshöhe bezogene Kraft betrachtet wurde, soll jetzt die Hindernishöhe festgestellt werden, bei der die Bodenkraft gerade zu Null wird, d. h. das Rad von der Fahrbahn abspringt und überhaupt keine Kräfte (Spurführungs-, Treib- und Bremskräfte) übertragen kann. Dies kann bei plötzlich auftretenden Seiten- (bes. Wind-) Kräften zu unliebsamen Folgen für schnell-fahrende Fahrzeuge führen.

In der Arbeit [12] wurden die Grenzhöhen von Erhebungen und Mulden, bei denen das Rad gerade noch nicht abspringt, für verschiedene Fahrzeuge ermittelt, deren Ergebnisse in Abb. 19 zu sehen sind. Hier spielt wie im vorigen Abschnitt bei den dyn. Radlasten die Größe der Reifenfederkonstante c_1 eine überragende Rolle. Je weicher der Reifen (s. Fahrzeug XII), um so größer ist die Grenzhöhe. Da aber nach dem Stand der Reifentechnik eine statische Reifeneindrückung von $f_{\text{stat}} = 3,44$ cm bei normalen PKW-Reifen selten vorkommt, soll das Fahrzeug XII nicht berücksichtigt werden. Die anderen Kurvenläufe werden, wie in Abb. 16, durch eine einfache mittlere Kurve ersetzt, die auch hier nur bis zu Erregerfrequenzen von $\omega = 70^{1/s}$ gezeichnet wurde. Beim erhabenen Hindernis werden die Grenzhöhen wieder größer, weil der „Reifen die Unebenheiten schluckt“ (natürlich nicht unbegrenzt, da sonst der Reifen durchschlagen wird). Beim vertieften Hindernis dagegen wird $H = 0$ für $\omega \rightarrow \infty$, da, bedingt durch die Massenträgheit der Achse, der Reifen der Mulde nicht folgen kann. Da die Zeit, in der das Rad bei hohen Erregerfrequenzen keine Kräfte auf die Fahrbahn ausübt, sehr klein ist, ist der Verlauf von $H = f(\omega)$ für $\omega > 70$ nicht wichtig.

Fahrzeug	III	IV	V	VII	IX	XII	Dim.
k_s	3,9	7,8	15,5	2,7	3,9	3,9	$\text{kg s}^2/\text{cm}$
c_s	100	100	100	50	100	100	kg/cm
m_s	0,15	0,15	0,15	0,15	0,1	0,1	$\text{kg s}^2/\text{cm}$
k_r	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	$\text{kg s}^2/\text{cm}$
c_r	300	300	300	300	300	200	kg/cm
f_{stat}	2,45	2,45	2,45	2,45	2,29	3,44	cm

$$m_2 = 0,6 \text{ kg s}^2/\text{cm}$$

$$f_{\text{stat}} = \frac{(m_s + m_2)g}{c_s}$$

noch [12]

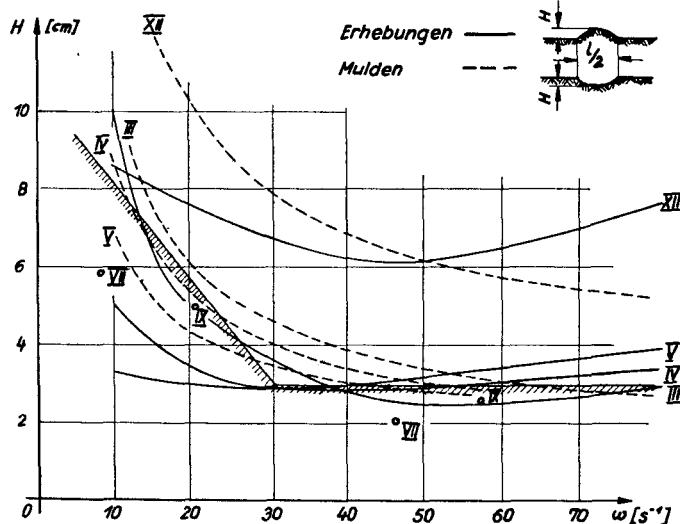


Abb. 19. Höhen von Einzelhindernissen, bei denen das Rad von der Fahrbahn abspringt

4.4 Zusammenfassung von Kapitel 4

In Abb. 20 wurden die Einzelergebnisse zusammengetragen, wobei die Erregerfrequenz $\omega = 2\pi \frac{v}{L}$ in Fahrgeschwindigkeit und Wellenlänge aufgeteilt wurde. Die Arbeitsweise mit dem Diagramm ist folgende: Man stellt z. B. aus dem mittels Unebenheitsgerät festgestellten Längsprofil der Straße fest, daß es sich um eine Wellenstraße mit 2,5 m Wellenlänge handelt. Beträgt die mittlere Geschwindigkeit der Fahrzeuge auf der Meßstrecke 80 km/h, so darf die zulässige Unebenheitshöhe nicht größer als 0,45 cm sein, wenn die Fahrbahn für den Menschen ohne Störung kurzzeitig ertragbar sein soll.

Schlußwort

Die Fahrbahnunebenheiten sind Ursache für unerwünschte Bewegungen der Fahrzeuge, die die zu befördernden Menschen und Lasten erschüttern und gegenüber der statischen Belastung zu unterschiedlichen Kräften zwischen Rädern und Fahrbahn führen.

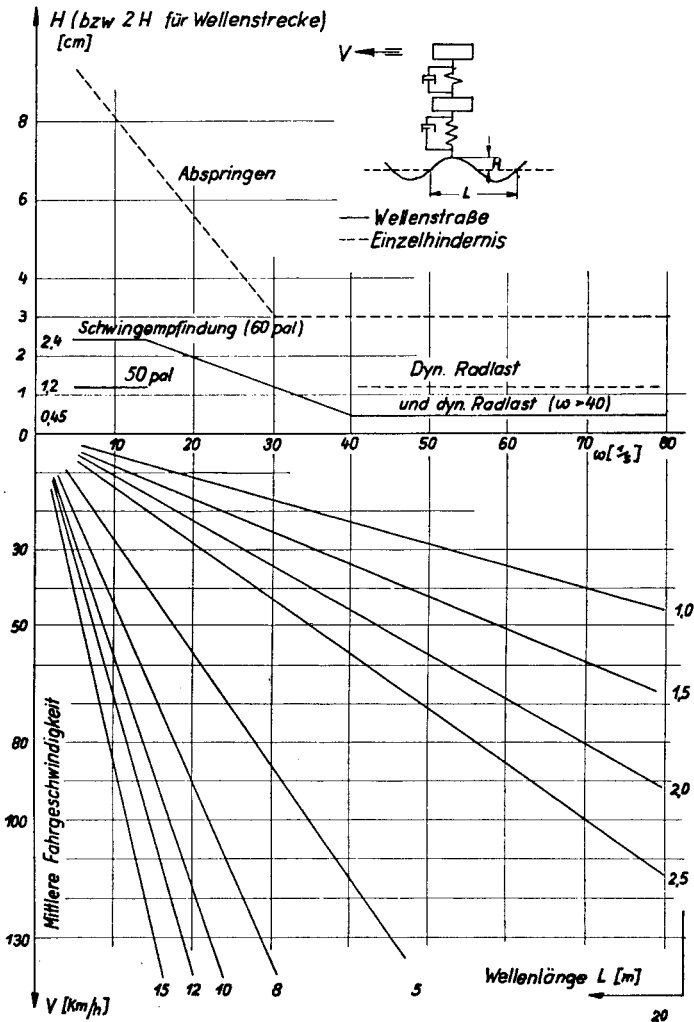


Abb. 20. Zusammenfassung der Diagramme 16 bis 19

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde ein Unebenheitsmeßgerät (Braunschweiger-Gerät) beschrieben, das die geodätischen Unebenheiten mit hoher Geschwindigkeit vermessen kann und dadurch zur Überprüfung von ganzen Straßenzügen geeignet ist. Die Aufnahme der Unebenheiten erfolgt mit dem trägheitslosen Abstandsmeßgerät nach Dr. *Mühlfeld*, und die Bezugslinie, von der die Unebenheiten aus gemessen werden, wird durch einen Punkt an einem langsam schwingenden Pendel, das wiederum in einem Anhänger sitzt, dargestellt. Durch Rechnung werden die Konstruktionsdaten des Anhängers ermittelt, bei dem die Abweichungen von der Bezugsgeraden am kleinsten sind.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde der Zusammenhang zwischen Unebenheit und Erschütterung des Menschen beim Befahren von Wellenstraßen, dynamischen Achslasten und Verlust des Kraftschlusses angegeben. In einfach handzuhabenden Diagrammen wird die Abhängigkeit der zulässigen Unebenheitshöhe von ihrer Länge und der mittleren Fahrzeuggeschwindigkeit dargestellt.

Literatur

- [1] *Raven, W.*: Welche wesentlichen und praktisch bedeutsamen Ergebnisse haben die bisherigen Forschungen im In- und Ausland über die Straßenunebenheit und Stoßbeeinflussung der Straße gebracht? Straßenoberfläche und Kraftfahrzeug 1949, S. 22/31 (ausführliches Literaturverzeichnis).
- [2] *Mühlfeld, A.*: Entwicklung eines hochfrequententechnischen Verfahrens für Reifenschwingungsmessungen. Dissertation Braunschweig 1949.
- [3] *Klotter, K.*: Technische Schwingungslehre, Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951.
- [4] *Strien, W.*: Diplom-Arbeit, Techn. Hochschule Braunschweig 1953.
- [5] *Freudenstein, G.*: Diplom-Arbeit, Techn. Hochschule Braunschweig 1954.
- [6] *Mitschke, M.*: Diplom-Arbeit, Technische Hochschule Braunschweig 1955.
- [7] *Croce, K.*: Bericht über ergänzende Unebenheitsmessungen bei Braunschweig im Sommer 1955 (nicht veröffentlicht).
- [8] *Marquard, E.*: Schwingungsdynamik des schnellen Straßenfahrzeuges. Giradet, Essen 1952.
- [9] *Lehr, E. und Bertschinger, U.*: Schwingungs- und Fahreigenschaften von Kraftfahrzeugen. ATZ 1946/47.
- [10] *Lehr, E.*: Schwingungstechnik Bd. 1, Springer, Berlin 1930.
- [11] *Marquard, E.*: Federung, Stoßdämpfung und dynamische Bodenkräfte. ATZ 1956, S. 134—138/153—161.
- [12] *Gauß, F.*: Über das Schwingungsverhalten luftbereifter Fahrzeuge. Forschung 21. Bd., S. 87—95/123—127, Auszug in Z. VDI 1955.
- [13] *Fung, Y. C.*: An Introduction to the Theory of Aeroelasticity. John Wiley u. Sons, New York; Chapman u. Hall, London 1955, S. 283ff.
- [14] *Reiher-Meister*: Die Empfindlichkeit des Menschen gegen Erschütterungen. Forschung 1931, S. 381.
- [15] *Reiher-Meister*: Die Empfindlichkeit des Menschen gegen Stöße. Forschung 1932, S. 177.
- [16] *Reiher-Meister*: Die Empfindlichkeit des Menschen gegen Erschütterungen. Forschung 1935, S. 116.
- [17] *Zeller, W.*: Maßeinheiten für Schwingungsstärke und Schwingempfindungsstärke. ATZ 1949, S. 95/97.
- [18] *Wedemeyer, E. A.*: Untersuchungen über Fahrbahnwellen. Z.VDI 1936, S. 191/192.
- [19] *Essers, E., und Marquard, E.*: Stoß- und Schwingungsdämpfung durch Luftreifen. Jahrbuch der T. H. Aachen 1951.
- [20] *Stumpf, K.*: Grundlagen und Methoden der Periodenforschung, Springer, Berlin 1937. Tafeln und Aufgaben zur Harmonischen Analyse und Periodogrammrechnung. Springer, Berlin 1939.
- [21] *Baur, F.*: Linke's Metereologisches Taschenbuch II. Bd., Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K. G., Leipzig 1953.
- [22] *Beermann, H. J.*: Untersuchungen der dynamischen Vertikalkraftwirkungen der ungefederten Massen von Straßenfahrzeugen. Dissertation T. H. Braunschweig 1956.
- [23] *Wedemeyer, E. A.*: Fahrzeugfederung. ATZ 1935, S. 272/275.
- [24] *Waas, H.*: Messung von Kraftfahrzeugschwingungen. Z. VDI 1935, S. 199/202.
- [25] *Essers, E.*: Fahrzeuggewichte — Bahnkräfte — Straßenschädigung. ATZ 1956, S. 1—7/47—52 (ausführliches Schrifttumsverzeichnis).
- [26] *Lampe, K.*: Der Einfluß der Dämpfung auf die Bodenhaftung von Kraftfahrzeugen. Z. VDI 1953, S. 1151/58.